

This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

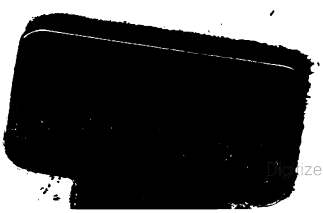
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Math. P. 390 Wallis

4°



Digitized by Google

<36613559550015

<36613559550015

Bayer. Staatsbibliothek

Digitized by Google

Digitized by Google

Math. P 390

Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,

ARITHMETICA INFINITORVM,

SIVE

Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheseos Problemata.



OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1656.

Digitized by Google

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Digitized by Google

Clariſsimo Spectatiſsimoq; Viro

Matheſeos Peritiſſimo,

D. GULIELMO OUGHTREDO,

Eccleſiæ quæ eſt Aldeburiæ, in agro Surrienſi, Rectori. S.

EN tibi tandem (*Vir Clariſſime*) *jam abſolutum opus illud cujus ſpem fecit Propoſitio ea Cyclometrica, quam ſub Paſchatis feſto Typis excuſam tibi dicavi. Quod cum, pro more, ubi in publicum prodeat, alicui inſcribendum ſit, non tam Virum magnum quam magnum Mathematicum quærendum putavi, cui illud inſcriberem. Adeoq; non alii cuiquam quam tibi magis illud deberi facile perſpexi; qui & a Matheſi optime meritus es, & cujus ſcriptis me profeciſſe lubens agnoſco: quippe qui in tua* Clave Mathematicæ, *opere licet non magno, ea breviter ſimul et perſpicuè tradidiſti, quæ magnis aliorum voluminibus fruſtra quæſitemus.*

Opus hoc invenies (ſiquid ego judico) plane novum. Cur enim ita non vocitem nihil video: nec alii credo id inficias ibunt. Quamvis enim non dubitandum ſit, quin propoſitiones aliis cognitæ ſparſim immiſceantur, (quod neceſſario faciendum erat, partim ut inde ad alia lux affulgeat, neq; videar aliquid comminiſci, quod Matheſi jam inventæ atq; excultæ nihil habeat affine; partim etiam ne hoc ipſum opus mutilum prodiret & mancum, cùm illæ ex principiis noſtris ita ſtatim conſequantur ut etiamſi

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN
Digitized by Google

amsi alias ignotæ essent necesse sit ut hinc statim innotescant; & quidem ex earum illustrioribus pleraſq; non apud alios prius sciverim exstare quam ad eas methodo hæc pervenerim:) cum tamen & nova multa, aliis nec inventa nec cogitata quidem, habeat; atq; omnia novâ methodo a nobis primitùs in Geometriam introductâ, tradat; eaq; (nisi meis fortasse nimis faveam) perspicuitate quâ in abstrusioribus hisce problematis nemo (quod sciam) usus est; Non est cur novum dubitem appellare.

Nempe inde ortum sumit hæc noſtra methodus ubi Cavallerii methodus Indivisibilium *desinit. Unde etiam & operi ipsi, ipsiq; titulo, ansa data est; ut enim ille suam,* Geometriam Indivisibilium, *ita Ego methodum noſtram,* Arithmeticam Infinitorum, *nominandam duxi.*

Quomodo autem ego huc pervenerim; licet id minus videatur dictu necessarium, cum omnia eâ fere methodo scripta sint quâ inventa; tamen, quoniam id tibi non ingratum fore judico, istius etiam rei historiam breviter contexam.

Exeunte Anno 1650 *incidi in Torricellii scripta Mathematica, (quæ ut per alia negotia licuit, anno sequente* 1651, *evolvi) ubi inter alia, Cavallerii* Geometriam Indivisibilium *exponit. Cavallerium ipsum nec ad manum habui, & apud Bibliopolas aliquoties frustra quæsivi. Ipsius autem methodus, prout apud Torricellium traditur, mihi quidem eò gratior erat quòd nescio quid ejusmodi ex quo primùm fere Matheſem salutaverim animo obversabatur; quod enim de circulo apud plerosq; obtinet, (qui pro infinitorum laterum polygono haberi solet, adeoq; Peripheria pro rectis infinitis infinitè brevibus;) visum erat mihi, mutatis mutandis, etiam alibi non inutiliter accommodari posse; & quidem eo spectare*

Digitized by Google

ſpectare non pauca quæ apud Euclidem, Apollonium, & præſertim Archimedem paſſim exſtant. Erant autem ea non niſi confuſa adhuc apud me cogitata quæ nondum in ordinem redegeram. Neq; enim per alia licuit negotia, Matheſi animum ex profeſſo applicare, ſed ei ſaltem horis nonnunquam ſubciſivis indulgere; priuſquam aliunde ad hanc quam jam ſubeo provinciam vocatus fuerim; quod non ita multo priùs contigerat.

Ubi hujuſmodi jam obtinuiſſe methodum perſenſeram; cogitare apud me cepi, num non hinc aliquid de circuli quadratura, quam ſummos ſemper viros exercuiſſe notum eſt, luminis accedat. Quod ſpem facere videbatur, hoc erat. Infinitorum Coni circulorum, ad totidem Cylindri, ratio jam erat cognita, nempe ut 1 ad 3; eorum autem diametri omnes in triangulo per axem coni, ad totidem in parallelogrammo per axem cylindri, ſunt (uti notum oſt) ut 1 ad 2. Pariter in Conoide parabolico circulos omnes ad totidem in cylindro circulos notum erat rationem habere 1 ad 2; eorum autem omnes diametros ad diametros horum eſſe ut 2 ad 3. Manifeſtum etiam erat rectas trianguli eſſe Arithmeticè proportionales, ſive ut 1, 2, 3, &c. ergo circulos coni (in diametrorum ratione duplicata) ut 1, 4, 9, &c. Item circulos Conoidis parabolici (in duplicata ratione ordinatim-applicatarum, hoc eſt, in ratione diametrorum,) ut 1, 2, 3, &c. ergo eorũ diametros ut √1, √2, √3, &c. quippe in circulorum ſuorum ratione ſubduplicata. Fieri igitur poſſe ſperabam, ut aliàs etiam ex cognita ratione quam habeat ſeries circulorum, ſive (quod eodem recidit) quadratorum, ad totidem æqualia; inveniri poſſet & quam habent rationem eorum vel diametri vel latera ad æqualia totidẽ Hoc autem ſi univerſali aliqua methodo invenire poſſẽ, de circuli quadratura ſatis proſpectũ eſſet. Cum enim jam notum erat, parallelos omnes in ſphæra circulos, ad totidem in

Digitized by Google

Cylindro, esse ut 2 ad 3; si inde cognosci posset quam habeant omnes eorum diametri ad diametros horum, inventum foret quod quæritur; nempe Circulum illæ, hæ Quadratum diametri constituunt. Reducto ita problemate Geometrico ad purè Arithmeticum.

Huic igitur inquisitioni, istius anni 1651 *fine, & initio sequentis* 1652, *me applicui; ea plane methodo quam indicat hic Tractatus: opinatus vel inde constare aliquando posse quomodo quadrandus esset circulus, vel forte ne quidem quadrandum esse, vel saltem aliquid hinc emersurum esse quod operæ esset pretium.*

Aggressus igitur sum primo (ut a simplicioribus inchoem) series simplices, puta quantitatum Arithmeticè proportionalium, vel in earum ratione duplicata, triplicata, &c. deinde & subduplicata, subtriplicata, &c. atq; ex his composita, puta, subduplicatæ triplicatæ, &c. aut etiam qualitercunq; multiplicata, vel juxta denominationem rationalem aut etiam irrationalem. In quibus omnibus res plane quidem ex voto & supra spem successit. Unde Theorema tandem generale emersit, Prop. 64. *traditum. Sed & quadraturam simul reperi non modo Parabolæ nova methodo præstandam, sed & Paraboloidum omnium, eorumq; complementorum, quod nemo antea, quod sciam, aggressus erat, nedum assecutus. Adeoq; hinc statim Geometriam auctam persensi; cum enim antea ex figuris curvilineis sola fere parabola quadraturam nacta erat, jam paraboloidum omnium infinita genera unâ quidem & generali methodo unica propositio quadranda doceat. Et quidem si unius Parabolæ quadratura Archimedem tantum nobilitaverit, (ubi omnes deinceps Mathematici ex eo tempore substiterunt tanquam ad Herculis columnas;) gratum illud orbi Mathematico futurum satis præsensi, si etiam ejusmodi figurarum infinita genera quadranda docerem. Sed & Conoidum item & Pyramidoi-*

dum

Digitized by Google

dum doctrinam hinc ampliatam vidi. Cum enim Archimedes ex Conoidibus & Sphæroidibus ſola recta tractaverit (ut & poſt illum alii) de Pyramidoidibus ne quidem mentione facta; ego illa omnia ſive Conoidea ſive Pyramidoidea tam recta quam inclinata ad Cylindros & Priſmata redegi. Nec ea tantum quæ ex Parabolis, ſed & quæ ex Paraboloidibus omnibus eorumve complementis formantur, de quibus altum hucuſq; apud omnes ſilentium, nec quicquam (quod ſciam) uſpiam tentatum. Sed & totam fere de Spiralibus doctrinam hinc etiam vidi directâ poſſe conſequentiâ derivari: Et quidem non modo ſpatia ſpiralibus adjacentia (quod fecit Archimedes) cum circulo comparanda docui, ſed & lineam ipſam ſpiralem cum peripheria, quod nemo antehac (quod ſciam) aggreſſus eſt, nedum præſtitit. Et propterea ſiquis ſpirali rectam æqualem dederit (quod aliqui ſe feciſſe ſomniarunt) Peripheriam item utrivis æqualem datam iri non dubito; adeoq; & circuli quadraturam vel ſic perfectam eſſe. Sed & ipſam ſpiralium doctrinam, non minus quam Parabolarum & Paraboloidum, ampliâſſe proclive erat, niſi quod nollem ad Corollaria nimis exſpatiari.

Tranſii deinde ad ſeries auctas (quas voco) & diminutas ſive mutilatas; quæ ex duarum pluriumve ſerierum vel aggregatis vel differentiis conſtant. Atq; hic etiam ſucceſſum minime contemnendum reperi. Nempe eas omnes ad ſeries æqualium redigere non erat difficile; adeoq; Conoidea & Sphæroidea, vel etiam Pyramidoidea, non modo recta ſed & inclinata, ad Cylindros & Priſmata redigere rem nullius eſſe negotii perſpexi: neq; ea tantum quæ ex Hyperbolis & Ellipſibus fiant, ſed & quæ ex Hyperboloidibus vel Elliptoidibus mille modis formari poſſent; verum eis ſigillatim recenſendis [illegible] non duxi, ne nimis divagarem, præſertim cum illud quivis poſſit nemo non ex traditis ſuo marte perſpiciat.

De

Digitized by Google

De seriebus autem istis sive auctis sive diminutis non ipsis solum, sed & quæ in earum ratione duplicata, triplicata, aut ulterius multiplicata procedunt, eandem inquisitionem eodem successu continuavi; uti ex iis quæ deinceps sequuntur propositionibus videndum est. Ubi simul numerorum figuratorum, puta triangularium, pyramidalium, &c. (quorum nullus vel exiguus hactenus usus fuerit, & fere ludicrus,) usus insignes ex insperato deteguntur.

Verum ubi de seriebus aliis quæ sint in istarum auctarum vel diminutarum ratione subduplicatâ, subtriplicata, &c. proximè agendum erat, (quod Circuli, Ellipseos, & Hyperbolæ quadraturam directè quidem & immediate spectabat, & quæ sola jam superfuit difficultas:) videbam illic aquam hærere, neq; ita facilè ac in prioribus me extricare posse. Re igitur variis modis tentata, nec eo tamen exitu qui votis omnino satisfaceret; eo deventum erat ut crederem rationem illam quæ quærebatur ejusmodi esse quæ nec veris numeris, nec quidem radicibus surdis esset explicabilis. Numerorum enim progressiones aliquot inveni inter quarum datos terminos alius erat interponendus, ut rationem quæsitam valeam exprimere. Eas autem progressiones tales esse ut nec Arithmeticæ dici possint (ubi augmenta continua sunt æqualia,) nec Geometricæ (ubi numeri continue multiplicantes sunt æquales,) sed tales quæ continuos multiplicatores habeant arithmetice proportionales, adeoq; magis adhuc sint compositæ [illegible] *am Geometricæ. Si autem in Geometrica progressione,* [illegible] *ntinui multiplicatores sunt æquales,) quamvis* [illegible] *fieri possit (verbi gratia, in 1, 4, 16, 64, &c.)* [illegible] *di terminis illius medii sint numeris expli-* [illegible] *omnibus (puta in 1, 2, 4, 8, &c.) id* [illegible] *ut numerum impossibilem ut-*

Digitized by Google

indicemus, (puta √2, √8, &c:) multò minus ſperandum fore judicavi, ut in progreſſione magis adhuc compoſitæ (ubi continui multiplicatores ſint continuè vel creſcentes vel decreſcentes) id ſemper fieri poſſit; adeoq; alium aliquem notationis modum (quam qui adhuc receptus eſt) inducendum putavi quo numerus ille impoſſibilis indicetur.

Atq; hactenus perveneram iſtius anni 1652 *initio, tempore (ſi memini) quadrageſimali; quo tempore nempe, per Academiæ noſtræ conſtitutiones, a publicis prælectionibus feriari permiſſum eſt, adeoq; privatis diſquiſitionibus magis vacare.*

Dum autem hic hærebam, placuit rem aliis quibus familiariter uſus ſum viris Mathematicis communicare, ut videam num illi auxilio eſſe poſſint in quæſita quantitate deſignanda. Adeoq; ex variis quas apud me conceperam ejuſmodi progreſſionibus, unam ſelegi, quæ omnium videbatur ſimpliciſſima, (ut quæ per numeros integros procedit;) eam nempe quæ jam habetur prop. 192. *hujuſce tractatus; eamq; ad hanc fere formam (non enim omnibus illam iiſdem plane verbis, ſed eodem tamen ſenſu propoſui) problematicè concepi;* Si æquabilem quandam curvam contingat in vertice recta unde ad curvam ducantur rectæ axi Parallelæ, æqualibus ab invicem diſtantiis remotæ, quarum prima ſit 1, ſecunda 6, tertia 30, quarta 140, quinta 630, &c; quanta erit illa quæ interponenda eſt media inter 1 & 6? *Vel etiam Arithmeticè,* In ſerie numerorum 1, 6, 30, 140, 630, &c. quæritur terminus medius ipſis 1 & 6 interponendus? *Fieri autem hos terminos indicabam, ex continua multiplicatione numerorum* $1 \times 4\frac{2}{1} \times 4\frac{3}{2} \times 4\frac{4}{3} \times 4\frac{5}{4}$ &c. *vel etiam* $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$ &c. *quorum tam numeratores quam denominatores ſunt Arithmetice proportionales. Problema ſic conceptum propoſui, menſibus ſequentibus, (inter alios)*

Digitized by Google

Clarissimis viris & Mathematicis, D. Setho Wardo *Astronomiæ Professori Saviliano, Collegæ meo meritissimo;* Laurentio Rook, *tunc apud Oxonienses commoranti, nunc apud Londinenses in Collegio Greshamensi Professori Astronomico;* & Richardo Rawlinson *Collegii Regi-nalis apud Oxonienses Socio; nescio annon etiam sub eodem tempore, (an aliquanto serius)* Roberto Wood *Socio Collegii Lincolniensis,* & Christophoro Wren *Collegii Omnium-Animarum nunc Socio; (sed & aliis etiam aliquot, quibus nominandis supersedeo:) & quidem detecto iis (ni fallor) omnibus eo ad quem tendebat scopo; nempe, datâ illâ quæ quærebatur quantitate absolutam fore quadraturam Circuli. Non autem vel ego mihi vel etiam eorum quispiam (quibus nec erat obvium responsum, nec vacabat suis postpositis de quæsitis meis admodum esse solicitis,) ex voto satisfecit. Monuit autem eorum aliquis ut* Gregorii a Sancto Vincentio *Opus Geometricum consulerem (cujus ne nomen quidem antea audiveram) ut qui magno volumine hujusmodi res quæ ad circuli Quadraturam spectent exposuerit. Huic ego monito obtemperabam; librumq; utut tanto erat volumine ut non integrum perlegere vacaverit, pervolvi utcunq; ; solicitus an inde quæ ad rem nostram facerent reperire possim. Inveni autem aliquando eadem & illi & mihi (quod nihil mirum erat) speculationes obtigisse, licèt diversis methodis eo pervenerimus. Exempli gratia, Prop. 15. nostra apud illum (si memini) alicubi occurrit: at tamen scrupulum illum quem ibidem in Scholio indicavimus, ille vel dissimulat, vel (quod potius putaverim) non animadvertit, nec memini an sensu nostro illam intelligat necne. Item, quod appellat ille* plani in planum ductum, *id ipsum est quod nos et hic, et in Tractatu de Conicis Sectionibus (qui huic gemellus est eodem anno* 1652 *conceptus & primitus*

Digitized by Google

primitùs formatus) dicitur, ductus rectarum omnium unius plani in alterius respectivas rectas: *cur autem ego* ductum plani in planum *non dixerim, in causâ erat, quòd revera non tam planum in planum (sic enim prodiret plano-planum, quatuor nempe dimensionum, non solidum,) sed latitudo unius in latitudinem alterius, & factum deniq; in communem altitudinem ducitur; adeoq; tres (non quatuor) emergunt dimensiones. Et alia fortasse nonnulla. Ut autem ex suis ne unam vel propositionem vel demonstrationem in nostrum tractatum assumpsi, quam ego antea non inveneram; ita siquæ forsan occurrant utriq; communes, non opus esse credidi, ut propterea ex nostris delerem, cum & illud sæpissimè contingere sit necesse, ut ubi duo vel plures rem eandem tractandam suscipiant in easdem aliquando incedant speculationes. Verum (utut ille multa habeat acutè inventa, methodo a nostra plane aliena) illud quod apud eum maximè quærebam nusquam inveni; neq; enim ille vel eousq; rem perduxerat, nec etiàm circuli quadraturam, quam se invenisse perhibet, omnino attingit, sed ad propositionem nostræ prop.* 136. *non multum absimilem ubi pervenerat, ratus inde se circuli quadraturam invenisse, non tamen assecutus est; uti in* Ἐξετάσει *sua ostendit* D. Hugenius.

Sub ejusdem anni (1652) *autumno, Clarissimo Viro* Francisco Schotenio *Matheseos Professori apud Lugduni-Batavos, inter alia, proposui etiam hoc problema, (tecto tamen quo collimabat scopo;) qui, re statim cum Clarissimo Viro* Christiano Hugenio *communicata, rescriptis non ita multò post literis intricatam rei difficultatem (utut primo aspectu facilior visa fuerit) subindicavit, neque interim spem fecit vel sibi vel Dom.* Hugenio *vacaturum fore ut ei ulterius exquirendæ plus operæ impen-*

Digitized by Google

dant. His eorum omnium responsis, confirmatior factus sum in ea quam pridem conceperam opinione, nempe terminum illum quæsitum neq; numerum rationalem esse, neq; ex adhuc receptis surdis aliquem; sed nova notatione designandum; & quidem, si libet, eâ quam nos ad prop. 190. assignavimus. Si vero (prout verbi gratia √2, licet veris numeris exprimi præcisè non possit, possit tamen quam proximè, ita) velimus hanc quantitatem veris numeris quam proximè exprimere, (tanta nempe ἀκριβείᾳ quanta quis velit, modò præcisam non velit,) quomodo illud fiat docemus prop. 191. Quomodo illud Geometricè utcunq; exhibeatur, ostensum est item propositionibus sequentibus. Adeoq; circuli quadraturam eousq; prosequuti videmur quantum numerorum natura patitur. Qui vero ulterius rem præstare postulat, perinde est ac si postulet √2 veris numeris exprimere: quod iniquum esset postulatum. Non interim ignoro quin possit & aliis etiam modis inexplicabilis illa quantitas characteribus designari, atq; ad numeros veris proximos aliis item methodis perveniri, (sicut & de radicibus surdis dici possit,) qua in re non est ut ego viris Mathematicis quicquam præscribam, sed quibus quisq; malit uti liberum relinquam.

Absoluta autem circuli quadratura, non opus esse duxi cognata illi alia problemata sigillatim attingere; puta quam habeat rationem diameter ad peripheriam; aut sphæra ad cubum; aut conus vel cylindrus ad pyramidem aut prisma; aliaq; similia: nemo enim nescit hæc inde colligere.

Sed neq; de quadratura Ellipseos seorsim quicquam dicendum videbatur; quippe quæ junctim cum quadratura circuli traditur.

Hyperbolæ quadraturam quousq; fuerim assecutus, prop. 165. ostendimus.

Interim

Digitized by Google

Interim tamen, methodi quam tradeſtium ſecutus, inopinato incidi in quæſtionem ſatis mirabilem de menſurandis figuris altera parte terminatis altera in infinitum continuatis. Adeoq; quod in una figura ſolida præſtitit Torricellius, id nos in aliis infinitis tam planis quam ſolidis faciendum oſtendimus, prop. 87. & ſeq. ad 107. Et ſimul docemus quo dignoſcatur criterio num ejuſmodi figuræ propoſitæ in infinitum continuatæ finitam tandem an infinitam magnitudinem ſint aſſecuturæ. Quæ quidem & miranda ſatis, & jucunda ſimul, videatur ſpeculatio.

Quod autem jam ante tres annos invenerim, cur non citius in publicum dederim; in cauſa fuit partim quod ego aliis non rarò negotiis fuerim avocatus, ſed præſertim quod Typographus, aliis edendis occupatior, non niſi ſerius ſuſceperit & tardius exſecutus ſit & hujus & aliorum qui cum hoc prodeunt tractatuum impreſſionem. Quam verò, dum quæ jam prodeunt ſub Prelo erant, placuit (ſub æquinoctio verno) quaſi in anteceſſum emittere, propoſitionem Cyclometricam, (quæ & eam continet, quam ante aliquot annos ſub problematis forma, ut ſupra dictum eſt, egregiis aliquot viris propoſueram,) invenies ex tribus illis quæ hunc tractatum claudunt deſumptam eſſe. Ex eo autem tempore, (menſe jam proximè præterito) prodiit Libellus D. Hobbes; qui jam magna pollicitus in Geometria, & ſpeciatim circuli quadraturam anguliq; in data ratione ſectionem, aliaq; his cognata, Libellum tandem ſuum in publicum emiſit, quo ſe oſtendit nec horum quicquam præſtitiſſe, nec quidem præſtiturum eſſe; adeo enim turpiſſimis paralogiſmis ubiq; ſcatet Libellus iſte, ut rarò aliquando quid ſanum invenias, (quod noſtro iſtius Elencho, *qui & jam ſub Prelo eſt, manifeſtum fiet;) unde & Authorem non eum eſſe facile*

Digitized by Google

facile dignoscas a quo hujusmodi mysteria speremus retexenda.

Cæterum vale, Venerande Senex: Et te Deus summe misericors feliciter sospitet, tuaq; omnia faxit prospera: ut tandem, post Senium Feliciter & Piè transactum, aerumnosam quam vivimus vitam vitâ communes meliori. Quod animitus precatur

Tui Observantissimus

Dabam Oxoniæ
Julii 19. 1655.

JO: WALLIS.

Propositio quam memorat Epistola præcedens hæc est quæ sequitur.

Digitized by Google

SPECTATISSIMO VIRO

D. GULIELMO OUGHTREDO,

Matheseos cognitione Celeberrimo,

JOHANNES WALLISIUS

Geom. Prof. OXON. S.

QUam tibi antehac (Celeberrime Vir) Propositiorem, velatâ facie, & formâ Problematicâ; ut & aliis, quibuscum rem habui, Mathematicis non paucis ante aliquot annos, exhibueram; celatu plerumq; (nonnullis tamen detecto) in quem dirigebatur scopo: En tandem apertâ fronte, formâ Theorematicâ, eloquentem (quam prius subticebat)

Circuli Quadraturam.

EXpositâ æquabili curvâ VC, cui occurrat in vertice recta VT, in quotlibet particulas æquales divisa, &, à singulis divisionum punctis, totidem rectis parallelis ad curvam usq; ductis, quarum secunda sit 1, quarta 6, sexta 30, octava 140, &c. Erit, ut earum secunda ad tertiam, sic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Vel, Si sit secunda 1, quarta $1\frac{1}{2}$ sexta $1\frac{7}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic Circulus ad Quadratum Diametri.

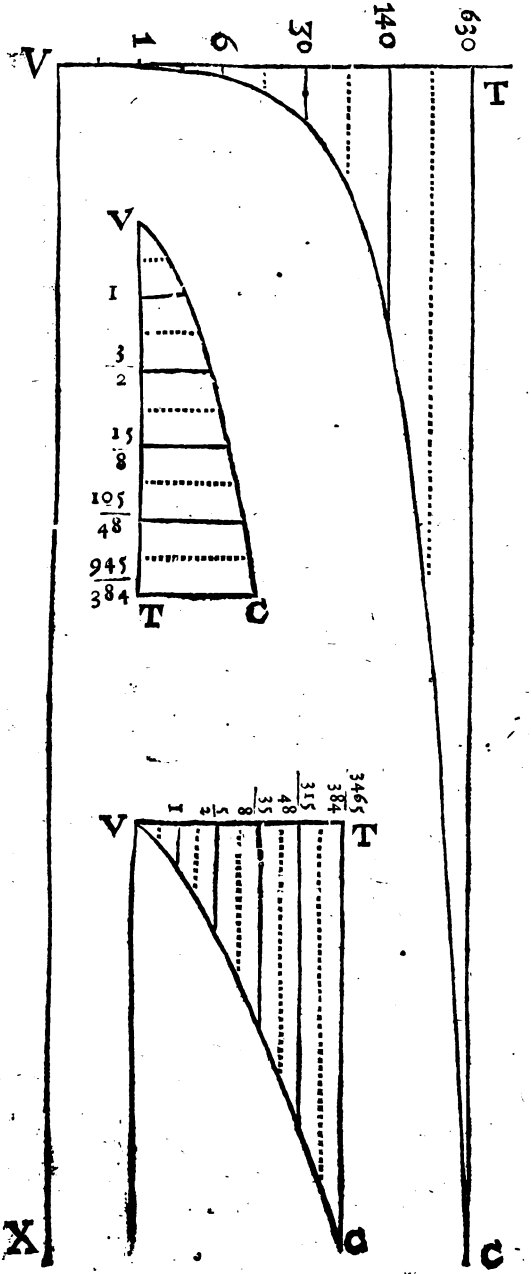
Vel, Si sit secunda 1, quarta $2\frac{1}{8}$, sexta $4\frac{3}{8}$, &c. Erit, ut secunda ad tertiam, sic triplum Circuli ad quadruplum Quadrati ex Diametro.

Totum Demonstrationis progressum, ipsamq; methodum quâ tam ad hanc circuli, quam ad innumeras alias aliorum curvilineorum quadraturas pervenerim, ostendet tractatus quem apud me jam aliquandiu perfectum habeo, & quidem in Typographorum usum exscriptum, quem in publicum daturus sum, quam primum per Typographorum moras licebit, quorum otia per duos integros & quod excurrit annos jam jam exspectavi.

Dabam è Typographéo *Oxonienſi* postridie Paschatis,

Anno Dom. 1655.

Digitized by Google



Digitized by Google

Arithmetica Infinitorum.

SIVE
NOVA METHODUS INQUIRENDI
in Curvilineorum Quadraturam, aliaq;
difficiliora Matheſeos Problemata.

PROP. I. *Lemma.*

SI proponatur ſeries Quantitatum *Arithmetice-proportionalium* (ſive juxta naturalē numerorum conſecutionem) continuè creſcentium, a puncto vel 0 (ciphra, ſeu nihilo) inchoatarum, (puta ut 0, 1, 2, 3, 4. &c.) propoſitum ſit inquirere, quam habeat rationem earum omnium aggregatum, ad aggregatum totidem maximæ æqualium.

Simpliciſſimus inveſtigandi modus, in hoc & ſequentibus aliquot Problematis, eſt, rem ipſam aliquouſq; præſtare, & rationes prodeuntes obſervare atq; invicem comparare; ut inductione tandem univerſalis propoſitio innoteſcat.

Eſt igitur, exempli gratia, $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$. $\frac{0+1+2=3}{2+2+2=6} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3=6}{3+3+3+3=12} = \frac{1}{2}$, $\frac{0+1+2+3+4=10}{4+4+4+4+4=20} = \frac{1}{2}$.

$\frac{0+1+2+3+4+5=15}{5+5+5+5+5+5=30} = \frac{1}{2}$ $\frac{0+1+2+3+4+5+6=21}{6+6+6+6+6+6+6=42} = \frac{1}{2}$.

Et pari modo, quantumlibet progrediamur, prodibit ſemper ratio ſubdupla. Adeóq; ----

Digitized by Google

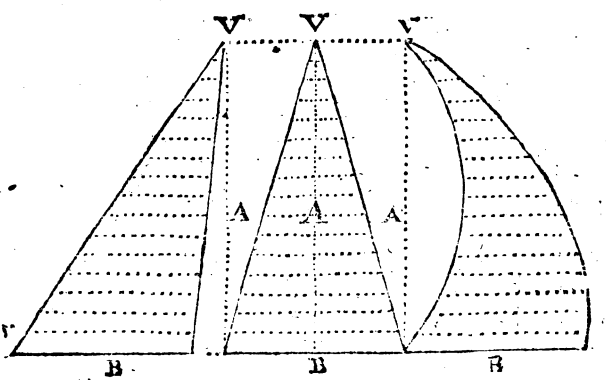
PROP. II. *Theorema.*

SI ſumatur ſeries quantitatum Arithmeticè proportionalium (ſive juxta naturalem numerorum conſecutionem) continuè creſcentium, a puncto vel 0 inchoatarum, & numero quidem vel finitarum vel infinitarum (nulla enim diſcriminis cauſa erit,) erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 2.

Nempe, ſi primus terminus ſit 0, ſecundus 1, (nam ſi ſecus, moderatio adhibenda erit,) & ultimus l erit ſumma $\frac{l+1}{2}\,l$. (erit enim, eo caſu, numerus terminorum $l+1$.) vel, (poſito numero terminorum a, quantuſcunq; ſit terminus ſecundus) $\frac{1}{2}\,al$.

PROP. III. *Corollarium.*

ERgo, *Triangulum ad Parallelogrammum (ſuper æquali baſe, æquè altum,) eſt ut* 1 *ad* 2.

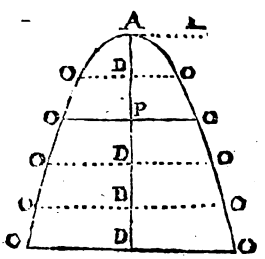


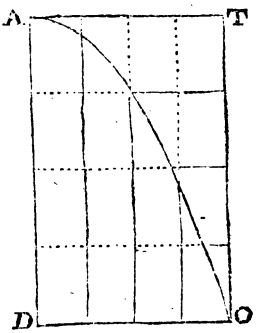
Triangulum

Triangulum enim constat quasi ex infinitis rectis parallelis Arithmeticè-proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima est basis, (ut ostendimus ad pr. 1. & 2. libri nostri de Conicis Sectionibus;) Parallelogrammum autem ex totidem basi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc est ut 1 ad 2 (per præced.) Quod erat demonstrandum.

PROP. IV. *Corollarium.*

ITem, *Pyramidoides vel Conoides Parabolicum (sive erectum sit sive inclinatum,) ad Prisma vel Cylindrum (super æquali basi, æque-altum,) est ad* 1 *ad* 2.





Constat enim Pyramidoides vel Conoides Parabolicum quasi ex infinitis planis Arithmetice-proportionalibus, a puncto inchoatis, quarum maxima est basis, (ut ostendimus prop. 9. Con. Sect.) Prisma verò vel Cylindrus ex totidem basi æqualibus, (ut patet:) Ergo illud ad hoc ut 1 ad 2, per prop. 2.

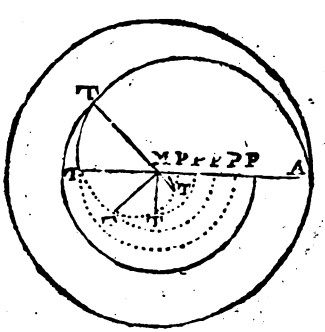
PROP. V. *Corollarium.*

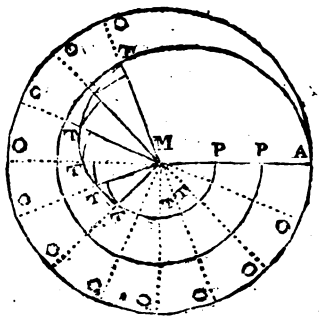
ITem, *Linea Spiralis qualibet MT (a Spiralis Principio exorsa) ad correspondentem Peripher.e a.. conter-*

Digitized by Google

conterminum PT (a Principio circulationis exorsum,) est ut 1 *ad* 2.

Esto enim Linea Spiralis (una circulatione facta) MTA, Principium Spiralis M, (quod idem esto & centrum Arcûs Peripheriæ, quem correspondentem voco,) Principium circulationis recta MA, quæ æquabili motu circumducta (manente puncto M) supponitur puncto suo A peripheriam describere AOA (qui *Circulus primus* vel potius *Circuli primi Peripheria*, di-





Spiralis in utraq; figura continuanda erat integra ad medium usq; sed, per Cælatoris incuriam, in altera manca est, in altera intercisa.

ci vel solet vel commode potest,) dum interim punctum aliquod (in eadem recta circumducta) moveri supponitur (æquabili item motu) ab M ad A, motu suo lineam Spiralem MTA describens: Adeóq; recta quælibet MT (a principio spiralis M, ad spiralem ubivis ducta) erit ad rectam MA, ut peripheriæ arcus AO (eodem tempore descriptus) ad peripheriam totam AOA, vel ut angulus AMT ad quatuor rectos: Adeoq & rectæ MT, MT, arcubus AO, AO, proportionales erunt, ut patet.

Tum, ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos AMT, TMT, &c. æquales invicem facientibus (adeoq; arithmeticè proportionalibus) supponamus (super illis angulis) similes Sectores totidem (saltem uno minus, quia in spacio primo sector inscribi non poterit) figuræ MTM (spirali MT & rectâ TM comprehensæ) inscribi. Sectores illi omnes constituent:

Digitized by Google

stituent figuram (ex similibus sectoribus compositam) ipsa figura MTM (cui inscribitur) minorem: Differentia verò perpetuo minuetur prout sectores illi (eidem MTM figuræ inscripti) plures fuerint, (ut patet,) adeò ut, si sectores illi supponantur infiniti, figura sic inscripta ipsi MTM figuræ congruet, (per ea quæ universaliter monuimus ad prop. 2. Cor. Sect.) & propterea sectorum illorum omnium arcus ipsi spirali MT congruent.

Sunt autem illi similium sectorum arcus (sicut eorum radii) arithmeticè proportionales, nempe ut 0, 1, 2, &c. angulus autem cujuslibet sectoris est ea pars anguli totius AMT quæ sectorum sive spaciorum numero cognominis est; adeoq; si sectores supponantur infiniti, erit angulus cujuslibet $\frac{1}{\infty}$ (pars infinitè parva) anguli totius AMT, ita nempe ut omnes simul æquentur toti AMT. (Liceat autem mihi, *καταχρησικῶς* forsan, Anguli nomine appellare angulorum etiam aggregatum, quamvis fortasse duos rectos vel æquet vel etiam superet.)

Spiralis igitur MT constare supponitur ex infinitis sectorum arcubus arithmeticè proportionalibus, (subtensis $\frac{1}{\infty}$ anguli AMT,) quorum minimi radius est 0, seu punctum, (nullius magnitudinis,) maximi vero recta MT.

Correspondens autem arcus conterminus PT, ex totidem constat sectorum arcubus maximo æqualibus, ut patet.

Ergo aggregatum illorum (hoc est linea spiralis MT) ad aggregatum horum (hoc est arcum conterminum PT) est ut 1 ad 2. per prop. 2.

PROP. VI. *Corollarium.*

ET propterea, *Linea Spiralis MA unâ circulatione facta æquatur semissi peripheriæ circuli primi, AA.*

Nam arcus conterminus spirali MA, est integra peripheria circuli primi puncto A descripta. Ideoq; &c. pro prop. 5. quod erat demonstrandum.

Digitized by Google

PROP. VII. *Coroll.*

ET *Spiralis descripta circulationibus duabus, tribus, quatuor, &c. integris; æquatur semissi peripheriæ circuli secundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c. sumptæ.*

In figura sequente.

Nam dum describitur Spiralis MAB (duabus circulationibus facta) Punctum illud B, peripheriam BB bis describit: & dum describitur spiralis MABC, peripheria CC ter describitur; & peripheria DD quater, dum describitur spiralis MABCD. Et sic deinceps, pro numero circulationum multiplicanda est peripheria contermini circuli, & multipli semissis æquatur spirali interea descriptæ.

PROP. VIII. *Coroll.*

SI vero *Spiralis ultra circulationem primam, sed non duabus integris continuetur, æquabitur semissi tam peripheriæ integri circuli contermini, quam ejusdem continuationis supra circulum integrum.*

Nam interea dum describitur (motu composito) Spiralis MAT, describetur etiam (a puncto P) arcus PPT, nempe tota peripheria PP cum adjuncto additamento PT. Ergo &c. pro prop. 5 Quod erat demonstrandum.

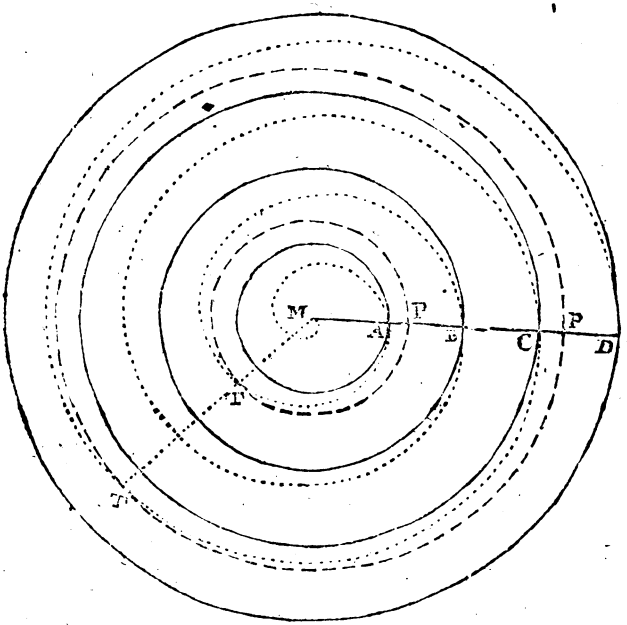
PROP. IX. *Coroll.*

ET pariter, *Si spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; æquabitur illa semissi conterminæ peripheriæ integræ, bis, ter, quater, aut sepius acceptæ (pro numero nempe integrarum circulationum) cum semisse item additamenti.*

Quia

Digitized by Google

Quia nempe dum spiralis illa describitur, toties describitur peripheria contermina integra, atq; insuper additamentum: Hoc est, correspondens arcus conterminus continet totidem in-



tegros circuli ambitus (quot sunt integræ circulationes) cum additamento. Ideoq; constat propositum, per prop 5.

PROP. X. *Corollarium.*

ATq; insuper, *Lineæ Spirales unâ, duabus, tribus, quatuor, &c. circulationibus factæ, (puta MA, MAB, MAEC, MAECD, curvæ) se habent ad invicem ut numerorum Arithmetice-proportionalium quadrata; nempe vt* 1, 4, 9, 16, *&c. Sive sunt in duplicata ratione rectarum* MA, *MB*, *MC*, *MD*, *&c.*

Sunt

Digitized by Google

Sunt enim rectæ MA, AB, BC, CD, invicem æquales (propter æquabilem progressum puncti mobilis in rectâ MA, etiam continuatâ, tantum in una circulatione æquabiliter progredientis quantum in altera;) adeóq; tam radii MA, MB, MC, MD, quam Peripheriæ (illis radiis descriptæ) A, B, C, D, sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4. Si igitur sumantur peripheriæ, prima semel, secunda bis, tertia ter, quarta quater, erunt illa multipla, (puta 1 A, 2 B, 3 C, 4 D,) ut numeri quadrati 1, 4, 9, 16, sive 1×1, 2×2, 3×3, 4×4. Et propterea etiam horum multiplorum semisses, hoc est (per prop. 5.) spirales MA, MAB, MABC, MABCD.

Vel aliter, si circuli primi peripheria ponatur A=p, erit secundi B=2p, tertii C=3p, quarti D=4p, & sic deinceps; & 1A=1p, 2B=2×2p=4p, 3C=3×3p=9p, 4D=4×4p=16p; &c. Et (per prop. 5) Curvæ spirales MA=$\frac{1}{2}$p, MAB=$\frac{2}{2}$B=$\frac{4}{2}$p, MABC=$\frac{3}{2}$C=$\frac{9}{2}$p, MABCD=$\frac{4}{2}$D=$\frac{16}{2}$p, &c. ideoq; ad invicem ut 1, 4, 9, 16, &c. hoc est in duplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c. (quæ sunt ad invicem ut 1, 2, 3, 4, &c.) Quod erat demonstrandum.

PROP. XI. *Coroll:*

ET universaliter; *Ejusdem (vel similium) spiralis segmenta quælibet (a principio spiralis exorsa) sunt ad invicem in duplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per constructionem lineæ spiralis) eadem sit ratio rectarum MT, MT, quæ est angulorum PMT, PMT, (anguli voce eo sensu sumpta qui supra innuitur prop. 5.) ratio arcuum PT, PT, (quæ ex duabus illis rationibus componitur,) ut & curvarum MT, MT, (quæ istorum arcuum sunt semisses) erit duplicata rationis rectarum MT, MT, seu ut MTq, MTq.

Sic v.g. si recta MA (unius circulationis) dicatur 1r, & peripheria circuli primi (eo radio descripta) 1p, erit spiralis MA=$\frac{1}{2}$p. Igitur, in una circulatione cum semisse, fiet recta conterminа 1$\frac{1}{2}$r=$\frac{3}{2}$r, & peripheria conterminі circuli $\frac{3}{2}$p, quæ

ducta

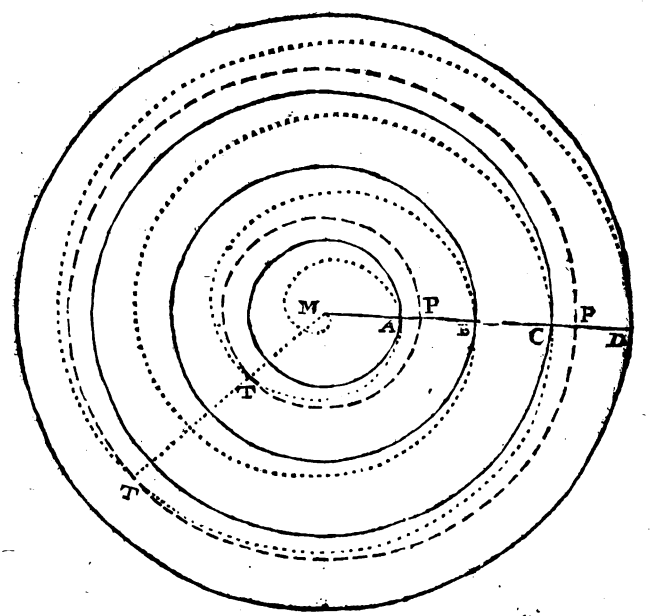
Digitized by Google

ducta in $\frac{1}{8}$ (numerum circulationum) fit $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times p = \frac{3}{4}p$: Ejusq; semissis $\frac{9}{2 \times 4}p = \frac{3}{8}p$ est linea spiralis eodem tempore descripta.

Similes *autem appello lineas Spirales, si rectæ MA, MB, MC, &c. in unâ, æquales sint homologis rectis in altera.*

PROP. XII. *Corollarium.*

SI vero ejusmodi spiralium dissimilium (puta si MB in unâ, tanta sit quanta MC in alia) rectæ conterminæ sint æquales; erunt spiralium illarum segmenta homologis suis rectis (puta MA in una, & MA in altera) reciprocè proportionales.



Nam v.g. in primâ, erit spiralis MAB (duabus circulatio-

nibus

nibus descripta) æqualis semissi peripheriæ suæ B, bis sumptæ; & in secunda, Spiralis MABC (tribus circulationibus descripta) æqualis semissi suæ peripheriæ C ter sumptæ: Cúmq; supponantur æquales peripheriæ B in primâ, & C in secunda, (propter æquales radios;) erunt spirales MAB prima, & MABC secunda, ad invicem 2 ad 3, (nempe ut peripheria b bis sumpta, ad eandem vel æqualem ter sumptam;) hoc est, in reciprocâ ratione rectarum homologarum MA, MA: Nam recta MA in primâ est $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & recta MA in secundâ est $\frac{1}{3}$ (ejusdem vel æqualis rectæ) MC: sunt igitur MA in secunda ad MA in primâ, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut $\frac{2}{6}$ ad $\frac{1}{6}$, vel ut 2 ad 3. Ideoq; Spiralis prioris segmentum MAB, ad spiralis posterioris segmentum MABC, ut recta MA in secunda ad rectam MA in primâ.

Atq; idem similiter ostendetur, quæcunq; fit ratio homologarum rectarum in dissimilibus spiralibus.

PROP. XIII. *Corollarium.*

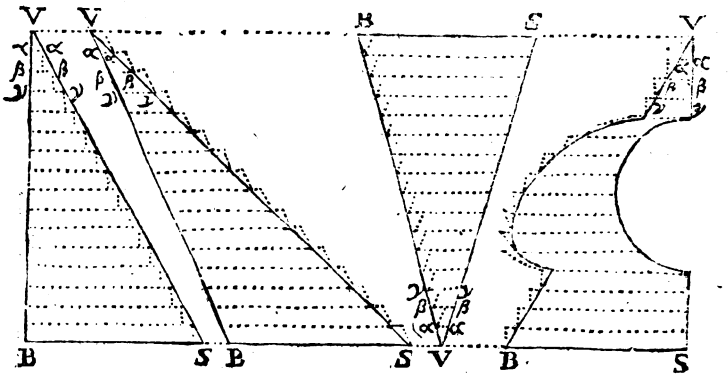
Si autem ejusmodi spiralium dissimilium rectæ conterminæ sint etiam inæquales; erunt illæ spiralium segmenta adinvicem in eâ ratione quæ componitur ex duplicata ratione rectarum conterminarum, & reciprocâ ratione rectarum homologarum.

Sequitur ex prop. 11. 12.

SCHOLIUM.

Notandum autem est, in propositionibus præcedentibus, quæ de linea Spirali agunt (quod & in secuturis aliquot facturus sum) me *lineæ Spiralis* appellationem (ne longa circumlocutione toties opus sit) abusive usum fuisse. Nempe, per *lineam Spiralem*, (quoties ea ad Peripheriam comparatur,) intellectum vellem *Aggregatum omnium arcuum Sectorum similium, numero infinitorum, ex quibus constat figura illa ex infinitis numero Sectoribus Spirali inscripta*; (qua scilicet & nos ad Prop. 5. &c. hujus, & Archimedes ad Prop. 21 &c. lin. spir. usi sumus:) ut ad prop. 5. innuimus. Quod quidem Aggregatum ipsa linea Spirali proprio sensu sumpta, perpetuò minus est, & maxime quidem circa spiralis

ralis initium. Quamvis enim Sectorum illorum numero infinitorum aggregatum, ipſi figuræ lineis recta & Spirali terminatæ, (juxta methodum Indiviſibilium) æquale ponatur; non tamen illud de omnium Arcubus cum ipſa Spirali (propriè dicta) comparatis obtinebit. Tantundem enim eſſet, acſi quis, dum infinita numero parallelogramma triangulo inſcripta (aut etiam circumſcripta) toti triangulo VBS æqualia videat, inde



concluderet eorum omnium latera rectæ VS adjacentia (rectæ VB parallela) ipſi VS ſimul æqualia eſſe, vel quæ rectæ VB adjacent (ipſi VS parallela) æqualia ſimul eſſe toti VB. (Quod ſiquando verum eſſe contingat, puta in triangulo iſoſceli, non tamen id univerſaliter concludendum erit.) Atq; hoc quidem eo potius admonendum duxi, quod viderim etiam viros doctos nonnunquam ſpecioſa ejuſmodi veriſimilitudine in lapſum proclives eſſe. Cur autem omiſſa Spirali genuina, ſpuriam hanc peripheriæ comparaverim; cauſa eſt, quod huic poſſim, non autem illi, æqualem peripheriam aſſignare.

PROP. XIV. *Corollarium.*

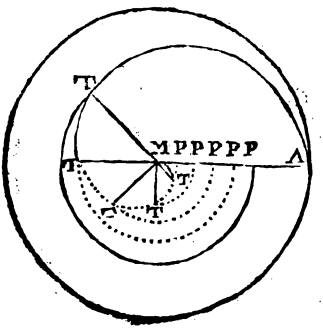
ET propterea etiam *ſegmenta ſpiralis, a principio ſpiralis exorſa, ſunt ad rectas conterminas, ſicut Parabolæ Diametri interceptæ, ad ordinatim-applicatas.*

Digitized by Google

Nempe in ratione duplicatâ, per prop. 11.

PROP. XV. *Coroll.*

Ideo si supponatur Spiralis nostra MTT ita evolvi, ut rectam constituat, & rectæ omnes TM, TM, fiant invicem parallelæ; erit illa, Diameter, hæ verò, ordinatim-applicatæ in Parabola: Contra vero, si supponatur Parabolæ diameter ita in arcus convoluta, ut ordinatim-applicatæ ad idem punctum terminentur; fiet illa, Spiralis; istæ, rectæ contermina; hoc deniq;, principium Spiralis.



SCHOLIUM.

Atq; hinc etiam ulterius patet illud quod post prop. 13. indicavimus. Nempe, Spiralem illam nostram ex infinitis similium Sectorum arcubus conflatam, non esse genuinam Spiralem propriè dictam, sed ipsa minorem. Cum enim constet, in parabola, ordinatim-applicatas, quæ vertici propiores sunt quam ea quæ lateri-recto æquatur, longiores esse quam sunt diametri-interceptæ; adeoq; non ita convolvi posse parabolæ diametrum (dummodo infracta maneat) ut earum ordinatim-applicatarum extremitates in ipso vertice coeant, (quippe quod, quæ jam curvata supponitur, minor esse non possit, quam recta contermina, quæ prius erat ordinatim-applicata:) Necesse est ut vera Spiralis, quæ sic convoluta est, major sit quam ea quæ supponitur ex arcuum aggregato conflari, quam Parabolæ diametro convenire jam ostensum est, quippe quæ est ubiq; in duplicata ratione rectarum centerminarum.

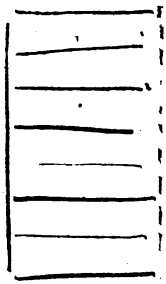
PROP.

Digitized by Google

PROP. XVI. *Coroll.*

PArabola vero sic convoluta (hoc est, figura Spirali nostræ adjacens) est ejusdem Parabolæ evolutæ semissis.

E. enim v. g. Si supponamus parallelogrammi PM latus PP ita convolvi, ut rectarum omnium PM puncta M in eodem puncto coeant, fiat ex Parallelogrammo (propter radios omnes a communi centro M æquales) circuli sector (qui circulo integro vel minor erit vel major vel æqualis, pro ea ratione quam ad invicem habeant rectæ PP, PM;) qui quidem Sector (hoc est Parallelogrammum convolutum) erit Parallelogrammi (evoluti) Semissis; (propterea quod pro infinitis Parallelogrammis ex quibus Parallelogrammum expositum constare supponitur, fiunt totidem in Sectore triangula eadem & bases & altitudines habentia:) Pari modo, si ita convolvetur Parabola ut dictum est, & ordinatim-applicatarum (pridem parallelarum) extrema altera in eodem puncto coeant; infinita illa parallelogramma ex quibus constare supponimus planum parabolæ (per ea quæ diximus ad prop. 2. & 8. Con. Sect.) fient totidem triangula eadem & bases & altitudines (cum illis parallelogrammis) habentia: & propterea Parabola sic convoluta (hoc est, figura Spiralis,) ipsius evolutæ semissis erit.



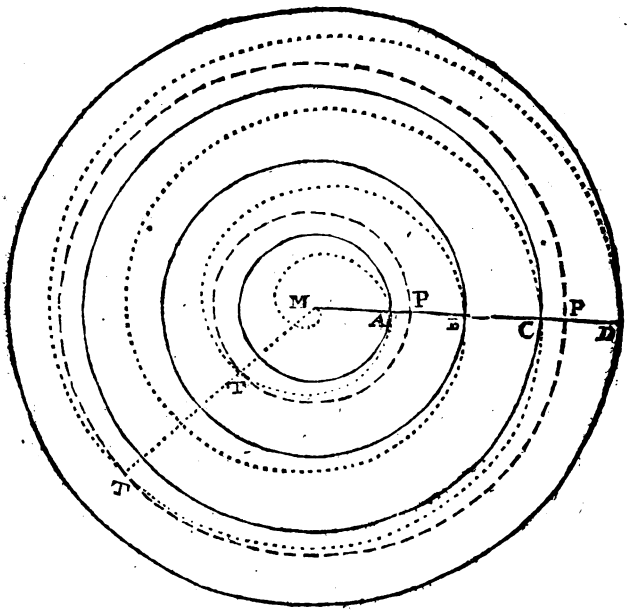
Atq; hoc quidem convenit cum iis quæ habet Torricellius Exempl. 8. eorum quæ ipse tractatui de solido Hyperbolico præmisit; utut a principiis plane diversis petita.

PROP. XVII. *Corollarium.*

INsuper, Segmenta spiralis, quæ fiunt circulationibus prima, secunda, tertia, quarta, & sic deinceps; sunt

Digitized by Google

inter se ut 1, 3, 5, 7, *& sic deinceps in progressione arithmetica.*



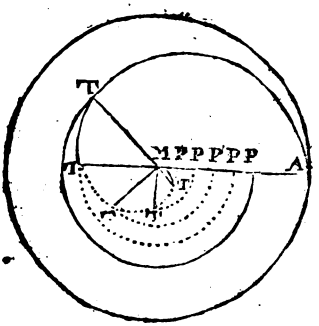
Sunt enim (per 10) spirales MA, MAB, MABC, MABCD, &c. ut 1, 4, 9, 16, &c. ergo segmenta spiralium MA, AB (= MAB − MA,) BC (= MABC − MAB,) CD (= MABCD − MABC,) &c. ut 1, (4 − 1 =) 3, (9 − 4 =) 5, (16 − 9 =) 7. &c.

PROP. XVIII. *Coroll.*

ET universaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuo PMT, TMT, &c.) æquales invicem facientibus, erunt spiralis segmenta continuè intercepta,* (MT, TT, &c.) *ut* 1, 3, 5, 7, *&c.*

Cum enim (propter æquales angulos) ipsæ rectæ MT, MT,

Digitized by Google



MT, &c. sint ut 1,2,3,4, &c. (per constructionem spiralis:) & propterea curvæ MT, MT, &c. (istis rectis conterminæ) sint in rectarum ratione duplicata (per prop. 11.) nempe ut 1,4,9,16, &c. erunt ipsa segmenta continua, MT, TT, &c. ut 1, 4 — 1, 9 — 4, 16 — 9. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Tota hæc de longitudine lineæ spiralis doctrina, continuis quatuordecim propositionibus jam tradita, est apud Archimedem in libro de lineis Spiralibus penitus omissa: Nescio an ab alio quopiam ex recentioribus tradita fuerit.

PROP. XIX. *Lemma.*

SI proponatur series Quantitatum in *duplicata* ratione Arithmeticè-proportionalium, (sive juxta seriem numerorum quadraticorum,) continuè crescentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut o, 1, 4, 9, 16, &c.) propositum sit inquirere, quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium?

Fiat investigatio per modum inductionis, (ut in prop. 1.) erit $\frac{0+1}{1+1=2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$. $\frac{0+1+4=5}{4+4+4=12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$. $\frac{0+1+4+9=14}{9+9+9+9=36} = \frac{7}{18} = \frac{1}{3} + \frac{1}{18}$. $\frac{0+1+4+9+16=30}{16+16+16+16+16=80} = \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{3} + \frac{1}{24}$. $\frac{0+1+4+9+16+25=55}{25+25+25+25+25+25=150} = \frac{11}{30} = \frac{1}{3} + \frac{1}{30}$.

&c.

$\frac{0+1+4+9+16+25+36=91}{36+36+36+36+36+36+36=252} = \frac{13}{28} = \frac{1}{3}+\frac{1}{56}$. Et sic deinceps.

Ratio proveniens est ubiq; major quam subtripla, seu $\frac{1}{3}$. Excessus autem perpetuò decrescit prout numerus terminorum augetur; puta $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{18}, \frac{1}{24}, \frac{1}{30}, \frac{1}{36}$ &c; aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis numero senario, (ut patet,) ut sit rationis provenientis excessus supra subtriplum, ea quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post 0, adeoq; ----

PROP. XX. *Theorema.*

SI proponatur series quantitatum in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium (sive juxta seriem numerorum quadraticorum) continue crescentium, a puncto vel 0 inchoatarum; ratio quam habet illa ad seriem totidem maxime æqualium, subtriplam superabit; eritq; excessus, ea ratio quam habet unitas ad sextuplum numeri terminorum post 0; sive, quam habet radix quadratica termini primi post 0, ad sextuplum radicis quadraticæ termini maximi.

Puta (si terminus post 0 primus ponatur 1, & ultimi latus l) $\frac{1+1}{3}l^2+\frac{1+1}{6l}l^2$. Vel (posito numero terminorum a, & ultimi latere l,) $\frac{a}{3}l^2+\frac{a}{6a-6}l$.

Patet ex Prop. præced.

Cùm autem crescente numero terminorum, excessus ille supra rationē subtriplum ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) si in infinitum procedatur, prorsus evanescurus est. Aeoq; ----

PROP.

Digitized by Google

PROP. XXI. *Theorema.*

SI pro ponatur ſeries infinita Quantitatum in duplicata ratione arithmetice-proportionaliũ, (ſive juxta ſeriem numerorum quadraticorum,) continue creſcentium, a puncto ſeu o inchoatarum ; erit illa ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad 3.

Patet ex præced.

PROP. XXII. *Corollarium.*

IDeoq; *Conus vel Pyramis ad Cylindrum vel Priſma (ſuper eadem vel æquali baſe æquè altum) eſt ut* 1 *ad* 3.

Conſtare enim ſupponimus tam Conum quam Pyramidem ex infinitis planis ſimilibus & parallelis, in duplicata ratione Arithmetice-proportionalium conſtitutis, quorum minimum ſupponitur Punctum, maximum verò baſis; (per ea quæ diximus ad Prop 6. Con. Sect.) Cylindrus autem vel Priſma, ex totidem maximo æqualibus (ut patet:) Ratio igitur eſt ut 1 ad 3. per præced.

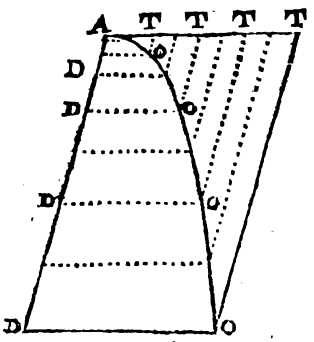
PROP. XXIII. *Coroll:*

ITem *Complementum Semi-parabolæ, (intellige figuram AOT quæ cum ipſa ſemi-parabola complet Parallelogrammum,) eſt ad Parallelogrammum TD (ſuper eadem vel æquali baſe æquè-altum) ut* 1 *ad* 3. *(Et conſequenter, ipſa ſemi-parabola eſt ad idem Parallelogrammum, ut* 2 *ad* 3.)

Eſto enim Figuræ AOT vertex A, diameter AT, baſis TO, eiq; parallelæ quotlibet (Baſem inter & verticem) TO, TO, &c. Quoniam ſunt (per prop. 21 Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. in ſubduplicata ratione rectarum AD, AD, &c. Erunt

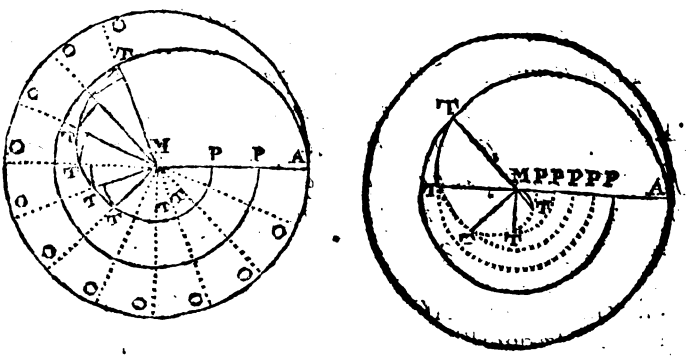
Digitized by Google

è contra ipſæ AD, AD, &c. hoc eſt TO, TO, &c. in ratione duplicata ipſarum DO, DO, &c. hoc eſt AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (conſtans ex infinitis rectis TO, TO, &c. in duplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmeticè proportionalium) erit ad Parallelogrammum æquè altum TD (conſtans ex totidem rectis ipſi TO maximæ æqualibus) ut 1 ad 3. per prop. 21. (Quod erat oſtendendum.) Et conſequenter, ſemiparabola AOD (parallelogrammi reſiduum) ad idem Parallelogrammum ut 2 ad 3.



PROP. XXIV. *Corollarium.*

ITem, *Figura* MTAM, *quæ ſpirali* MT (*a principio ſpiralis* M *exorſa*) *& rectâ* MT *conterminâ continetur*; *eſt ad Sectorem correſpondentem* PMT; *ut* 1 *ad* 3.



Nam (ut diximus ad Prop. 5.) conſtare ſupponimus Figuram

ram illam MTM ex infinitis Sectoribus similibus, quorum radii sunt Arithmeticè proportionales, adeoq; Sectores ipsi in duplicata ratione Arithmeticè proportionalium (quippe suorum laterum;) Sectorem autem PMT ex totidem Sectoribus maximo æqualibus: Eritq; propterea Figura illa ad hanc, ut 1 ad 3. per prop. 21.

Sectoris autem nomine hic appello etiam Sectorum quotlibet aggregatum, licet semi-circulum (aut quidem circulum integrum) æquet vel etiam superet; (sicut & de Anguli appellatione supra monuimus, ad Prop. 5.)

PROP. XXV. *Corollarium.*

ET propterea, *Figura MTA quæ spiralis circulatione prima describitur, æquatur trienti circuli primi, AA.*

Nam correspondens Sector conterminus est ipse circulus integer AA, circuli primi radio MA eodem tempore descriptus.

PROP. XXVI. *Corollarium.*

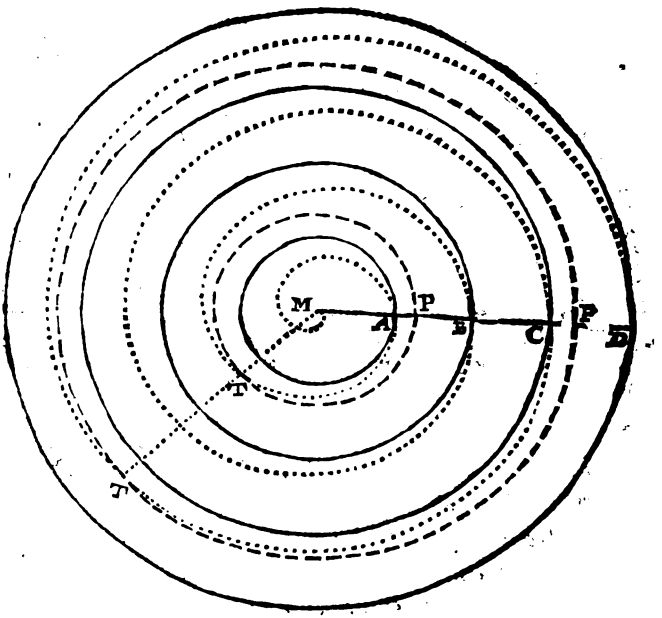
QUæ vero *figura describitur integris circulationibus prima & secunda; prima, secunda & tertia, prima, secunda, tertia, & quarta; & sic deinceps: (quâlibet parte toties repetita, quoties circulando describitur:) æquatur trienti circuli secundi, tertii, quarti, &c. bis, ter, quater, &c: (juxta numerum circulationum) sumpti.*

Nam dum describitur spiralis MAB (duabus circulationibus facta) a puncto mobili ab M ad B (in recta circumducta MB) pro moto & simul figura plana a recta (sic continuè crescente) circumducta: Eodem tempore describitur (a rectâ totâ MB circumducta) circulus secundus bis. Adeoq; quot partibus continuè crescentibus (in ratione duplicata Arithmeticè proportionalium) constat figura illa Spirali terminata, totidem maximæ æqualibus constabit circulus ille bis descriptus. Quare figura sic descripta spirali adjacens, erit ad circulum

Digitized by Google

conterminum BB bis ſumptum ut 1 ad 3. per prop. 24.

Et pariter figura ſpiralis, quæ circulationibus primâ, ſecunda & tertia deſcribitur, erit ad circulum tertium ter ſumptum, ut 1 ad 3. Et quæ deſcribitur circulationibus primâ, ſecunda, tertia & quarta, ad circulum quartum quater ſumptum, item ut 1 ad 3. Et ſic deinceps.



Notandum hic, quod tota figura ſpiralis, primâ circulatione deſcripta, in ſecunda circulatione repetitur; & quæ deſcribitur ſecundâ, repetitur in tertia; & ſic deinceps. Adeoq; v. g. in quatuor circulationibus, figura prima (quæ intra ſpiralem primam, primâ circulatione deſcriptam, continetur) quater, ſecunda (quæ inter ſpiralem primam & ſecundam jacet) ter, tertia (quæ inter ſpiralem ſecundam & tertiam jacet) bis, quarta ſemel deſcribitur: ideóq; figura prima quater, ſecunda ter, tertia bis, & quarta ſemel ſumpta, ſimul æquantur trienti circuli quarti quater ſumpti, nempe juxta numerum circulationum

Digitized by Google

tionum. Et pariter de quotvis circulationibus judicandum est, habita semper numeri circulationum consideratione.

PROP. XXVII. *Corollarium.*

SI autem *Spiralis ultra circulationem primam sed non duabus integris continuetur, figura spiralis sic descripta (bis sumpto quod bis describitur) æquabitur trienti tam integri circuli contermini, quam ejusdem continuationis supra circulum integrum.*

Nam interea dum describitur figura spiralis MATM, describitur etiam figura circularis aucta PPTM; nempe circulus integer PP, cum adjuncto etiam sectore PMT.

PROP. XXVIII. *Corollarium.*

ET pariter, *si Spiralis continuetur per circulationes duas, tres, quatuor, aut plures integras, cum additamento; figura spiralis sic descripta (repetitâ toties qualibet parte quoties describitur,) æquabitur trienti tam integri circuli contermini bis, ter, quater, aut sæpius sumpti (pro numero nempe integrarum circulationum,) quam etiam additamenti sive sectoris adjuncti.*

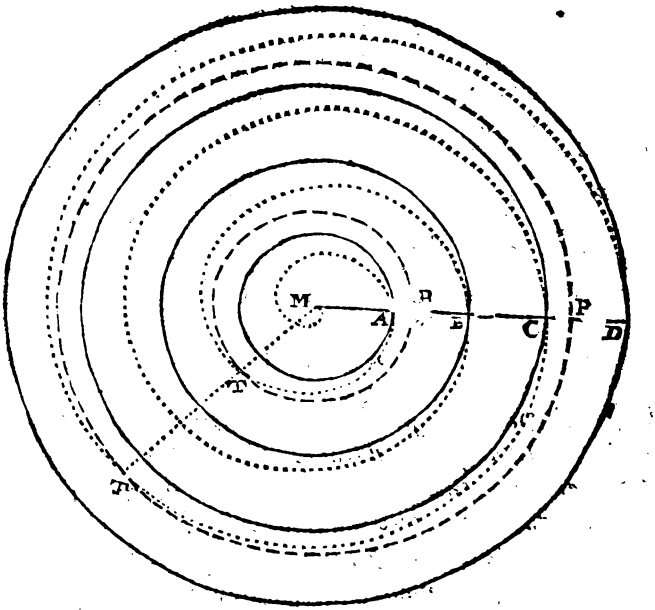
Quia nempe dum figura illa spiralis (a circumducta recta crescente) describitur, toties describitur, (a recta circumducta æquabili) circulus conterminus, atq; insuper additamentum.

PROP. XXIX. *Coroll.*

ATq; insuper. *Figuræ spirales quæ prima, quæ prima & secunda, quæ prima, secunda & tertia, quæ prima, secunda, tertia & quarta, (& sic deinceps) circulationibus describuntur, (puta MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c.) se habent ad invicem ut numerorum Arithmeticè proportionalium cubi,* 1,

Digitized by Google

8, 27, 64, &c: *sive in triplicata ratione rectarum MA, MB, MC, MD, &c.*



Sunt enim rectæ MA, MB, MC, MD, &c. ut 1, 2, 3, 4, &c. (ut sæpius dictum est,) ideoq; circuli primus, secundus, tertius, quartus, &c. (his radiis descripti) ut 1, 4, 9, 16, &c. (nempe in duplicata ratione radiorum; adeóq; si ponatur circulus primus A = 1 c, erit secundus B = 4 c, tertius C = 9 c, quartus D = 16 c, &c; & propterea si sumatur primus semel, secundus bis, tertius ter, quartus quater, &c. erunt 1 A = 1 c, 2 B = 2 × 4 c = 8 c, 3 C = 3 × 9 c = 27 c, 4 D = 4 × 16 c = 64 c, &c. adeoq; ad invicem ut numeri cubici 1, 8, 27, 64, &c. quapropter & horum trientes $\frac{1}{3}$ c, $\frac{8}{3}$ c, $\frac{27}{3}$ c, $\frac{64}{3}$ c, &c. hoc est, (per prop. 25, 26.) figuræ spirales MAM, MABM, MABCM, MABCDM, &c. sunt etiam inter se ut numeri cubici 1, 8, 24, 64, &c.

PROP.

Digitized by Google

PROP. XXX. *Corollarium.*

ET Universaliter, *Figuræ spirales (a spiralis principio exorsæ, & eâdem vel simili lineâ spirali terminatæ) sunt ad invicem in triplicata ratione rectarum conterminarum.*

Cum enim (per constructionem lineæ spiralis) eadem sit ratio rectarum MT, MT, quæ est angulorum PMT, PMT, (sumpta *Anguli* voce, eo sensu quo supra prop. 5. ut & *sectoris* voce, eo sensu quo supra prop. 24.) sectorum PMT, PMT, ad invicem ratio (quæ componitur ex ratione angulorum & duplicata ratione radiorum) est rectarum MT, MT, ad invicem, ratio triplicata: Et propterea eadem erit etiam ad invicem ratio figurarum spiralium MTM, MTM, quæ illorum Sectorum sunt trientes. per pr 24. *In Figura Prop. 29.*

Sic v.g. si recta MA (unius circulationis) dicatur 1 r, & circulus eo radio descriptus dicatur 1 c; figura spiralis eodem tempore descripta erit $\frac{1}{3}c$ Igitur in una circulatione cum semisse fiet recta contermina $1\frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$; circulus conterminus $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times c = \frac{3}{4}c$, qui ductus in $\frac{1}{2}$ (numerum circulationum) fit $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times c = \frac{3}{8}c$, ejusq; triens $\frac{3}{8}c$, est figura spiralis quæ & circulatione integra & insuper semisse describitur. Et similiter in quantacunq; circulatione.

PROP. XXXI. *Corollarium.*

SI vero *ejusmodi figuræ spirales, lineis spiralibus dissimilibus, & rectis æqualibus terminentur: (Puta si MB in una spirali, tanta sit, quanta MC in alia:) erunt figuræ illæ spirales homologis suis rectis (puta MA in unâ, & MA in altera) reciproce-proportionales.*

Nam in prima erit figura MABM (duabus circulationibus descripta) æqualis trienti circuli sui B bis sumpti; Et in secunda, figura MABCM (tribus circulationibus descripta) æqualis

Digitized by Google

qualis trienti circuli sui C ter sumpti. (per prop. 29, 30.) cumq; supponantur æquales circuli B in primâ & C in secunda (propter æquales radios,) erunt figuræ spirales MABM prima, & MABCM secunda, ad invicem, ut 2 ad 3, nempe ut circulus bis sumptus ad eundem vel æqualem ter sumptum;) hoc est, in reciproca ratione rectarum homologarum MA, MA. Nam MA in prima est $\frac{1}{2}$ rectæ MB, & MA in secunda $\frac{1}{3}$ (æqualis rectæ) MC; sunt igitur MA in secunda, ad MA in primâ, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel $\frac{2}{6}$ ad $\frac{3}{6}$, vel 2 ad 3 Ideoq; Figura MABM in spirali primâ, ad figuram MABCM in spirali secunda, ut recta MA in secunda ad rectam MA in primâ.

Atq; idem similiter ostendetur, quæcunq; sit ratio homologarum rectarum in dissimilibus spiralibus.

PROP. XXXII. *Corollarium.*

SI autem ejusmodi figuræ spirales, lineis spiralibus dissimilibus, & rectis item inæqualibus terminentur; erunt illæ ad invicem in ratione quæ componitur ex triplicata ratione rectarum terminantium, & reciproca ratione rectarum homologarum.

Sequitur ex Prop. 30, 31.

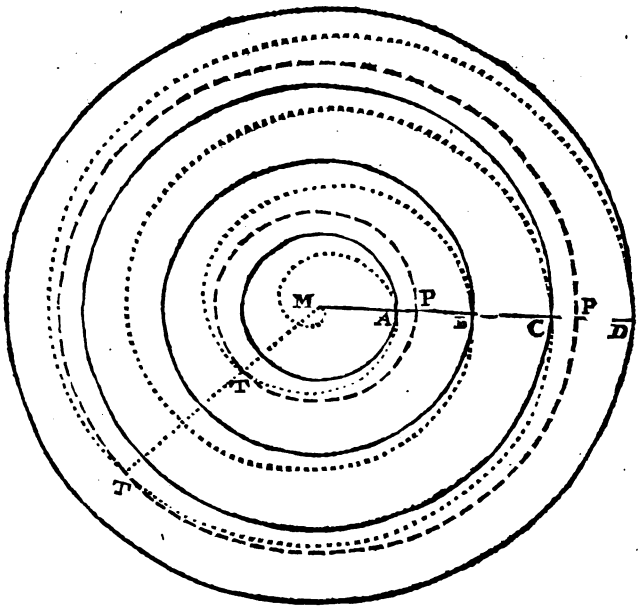
PROP. XXXIII. *Corollarium.*

PORRO, *Figuræ spirales, quæ circulationibus prima, secunda, tertia, quarta, &c. describuntur, sunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61, *&c. nempe ut differentiæ numerorum cubicorum, quorum latera sunt Arithmeticè-proportionalia.*

Nam (per pr. 29.) quæ prima, quæ prima & secunda, quæ prima secunda & tertia, quæ prima secunda tertia & quarta, &c, describuntur: sunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c. ergo, quæ prima, quæ secunda, quæ tertia, quæ quarta, &c. describuntur sunt ut 1, 8 — 1, 27 — 8, 64 — 27, 125 — 64 &c. hoc est,

Digitized by Google

eſt, ut 1, 7, 19, 37, 61, &c, nempe ut differentiæ numero-



rum cubicorum continue proximorum; Quarum quidem differentiarum exceſſus, ſive differentiarum differentiæ, ſunt Arithmetice proportionales: Nam $1+6=7$. $7+12=19$. $19+18=37$, $37+24=61$. &c.

PROP. XXXIV. *Coroll.*

ET univerſaliter, *Ductis quotlibet rectis MT, MT, &c. angulos continuos TMT, TMT, &c, æquales invicem facientibus; figuræ ſpirales continuæ, his rectis interpoſitæ ſunt ad invicem, ut* 1, 7, 19, 37, 61. *&c.*

Nam (per prop. 30.) Figuræ ſpirales a principio ad has lineas continuatæ ſunt ut 1, 8, 27, 64, 125, &c; Ergo Figuræ invicem continuè ſequentes his rectis terminatæ ſunt ut 1, 8 —

$1 = 7 - 8 = 19$, $64 - 27 = 37$, $125 - 64 = 61$. &c. Vel ut $\frac{1}{1}c, \frac{7}{1}c, \frac{19}{1}c, \frac{37}{1}c, \frac{61}{1}c$. &c.

PROP. XXXV. *Coroll.*

DEniq; *Figuræ ſpiralis portiones, quæ in ſingulis circulationibus de novo deſcribuntur, (præter illud quod in præcedenti circulatione deſcriptum fuerat,) nempe quod intra ſpiralem primam continetur, quod inter primam & ſecundam, quod inter ſecundam & tertiam, quod inter tertiam & quartam, &c. ſunt ad invicem ut* 1, 6, 12, 18, 24, &c. (*addendo ſemper, poſt locum ſecundum, numerum ſenarium;*) *Nempe ut differentiæ differentiarum numerorum cubicorum.*

Sequitur ex 33. Quia $1, 7 - 1, 19 - 7, 37 - 19, 61 - 37$, &c. ſunt ut 1, 6, 12, 18, 24. &c.

SCHOLIUM.

Hæc autem de aréâ figuræ ſpiralis doctrina, continuis duodecim propoſitionibus jam tradita, conſona eſt illis quæ tradit Archimedes circa finem libri de *Lineis Spiralibus*. Libet autem id ipſum paulo ulterius proſequi.

PROP. XXXVI. *Coroll.*

Complementum figuræ ſpiralis (quod nempe cum ipſa ſectorem conterminum complet) eſt ad ſectorem conterminum, ut 2 *ad* 3.

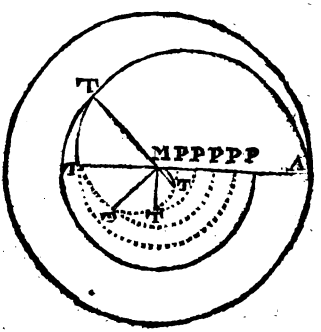
Sequitur hoc quidem ex prop. 24. Sed id ipſum aliter oſtendemus hoc modo.

Conſtare ſupponamus figuram PMTT (complementum figuræ ſpiralis MTTM) ex infinitis arcubus PT, PT, &c. qui quidem ſunt in duplicata ratione rectarum MP, MP, Arithmeticè proportionalium, (ut oſtendimus ad prop. 11.) ſector autem conterminus MPT, ex totidem conſtabit arcubus, ipſis MP,

Digitized by Google

MP, MP, proportionalibus, adeoq; Arithmetice proportionalibus, (ut patet:)

Est autem series ejusmodi, (in duplicata ratione Arithmetice proportionalium) $\frac{1}{3}$ seriei æqualium, (per prop. 21,) & series Arithmetice proportionalium $\frac{1}{3}$ ejusdem seriei æqualium (per prop 2) Ergo illa ad hanc (hoc est, complementum figuræ Spiralis ad Sectorem) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{3}$ (hoc est) ut 2 ad 3.



PROP. XXXVII. *Corollarium.*

ET speciatim; *Complementum figuræ spiralis unâ circulatione descriptæ, est ad circulum primum (ipsi conterminum) ut 2 ad 3.*

Nam constabit complementum illud ex infinitis arcubus PT, in ratione duplicata rectarum M P arithmetice-proportionalium (sive ut 0, 1, 4, 9, &c.) quorum maximus est integra peripheria A; constat autem circulus ille integer ex totidem peripheriis Arithmetice-proportionalibus, ut 0, 1, 2, 3, &c. quarum etiam maxima est eadem pæripheria A: Ideoq; Complementum illud, ad hunc circulum, ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{3}$, hoc est, ut 2 ad 3.

PROP. XXXVIII. *Corollarium.*

SPatia vero *quod figuris spiralibus in singulis circulationibus deest ad complendum suum circulum; sunt ut* 2, 5, 8, 11, 14, *&c. Arithmetice proportionales.*

Cum enim (posito circulo primo c) erunt (per prop. 29 & 33) figuræ spirales circulatione prima descripta $\frac{1}{3}c$, secunda $\frac{7}{3}c$, tertia $\frac{19}{3}c$, quarta $\frac{37}{3}c$. &c, circuli autem contermini

primus 1 c, secundus 4 c, tertius 9 c, quartus 16 c, &c. erit excessus circulorum, supra figuras spirales conterminas, primi $\frac{2}{3}$ c, secundi $\frac{8}{3}$ c, tertii $\frac{18}{3}$ c, quarti $\frac{32}{3}$ c. &c. Nam $1\,c - \frac{1}{3}\,c = \frac{2}{3}\,c$. $4\,c - \frac{7}{3}\,c = \frac{5}{3}\,c$. $9\,c - \frac{19}{3}\,c = \frac{8}{3}\,c$. $16\,c - \frac{32}{3}\,c = 11\,c$. &c.

SCHOLIUM.

Et quidem facile esset complures propositiones alias hisce similes adjungere, tam de ipsis figuris spiralibus quam earum complementis; tam quæ circulationibus integris describuntur, quam intermediis. Sed ex dictis facile poterit quilibet eas, si opus videbitur, supplere, ut non necesse sit diutius hîc morari. Et metuo ne jamjam nimius fuerim. Adjungam tamen unum aut alterum ex dictis Corollarium, (in eorum gratiam, qui dubitant, an possibile sit figuram aliquam rectilineam circulo æqualem esse:) Nempe ----

PAtet ex dictis; *Circulo cuilibet figuram aliquam rectilineam æqualem esse.*

Cum enim patet (ex pr. 25.) circulo cuilibet figuram aliquam spiralem æqualem esse: & (ex prop. 16) cuilibet figuræ spirali aliquam parabolam; & deniq; (ex pr. 23.) cuilibet Parabolæ aliquam figuram rectilineam, sequitur & cuilibet circulo figuram aliquam rectilineam æqualem esse.

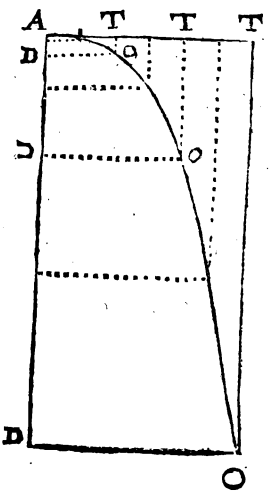
Non sunt igitur vel rectilineum & circulus, vel linea recta & curva, quantitates adeo inter se heterogeneæ, quin & invicem rite comparari, & quidem invicem æquales esse possint: Quanquam fieri possit ut circuli diameter & perimeter eousq; sint irrationales, ut nec veris numeris, nec etiam ullo adhuc in usum recepto notationis modo, earum ad invicem ratio exprimi possit.

POrro: Ex jam traditis innotescit etiam methodus *Rectam Parabolicæ (vel etiam Paraboloidicæ) æqualem quam proximè, inveniendi.*

Si enim, quæ semiparabolam rectam in vertice contingat recta AT, in quotlibet æquales particulas divisa; (quarum quælibet dicatur *a*, atq; numerus omnium *n*;) & in singularum particularum

Digitized by Google

particularum terminis ad tangentem illam totidem ordinatim applicentur rectæ, (Parabolæ diametro propterea parallelæ, & facientes ad Tangentem angulos rectos,) TO, TO, &c. quarum minima dicatur 1; erunt illæ ad invicem per prop. 23. ut numeri quadratici 1, 4, 9, 16, &c. & earum differentiæ ut 1, 3, 5, 7, &c. numeri impares deinceps ab unitate; (quarum differentiarum maxima erit $2n-1$.) Rectæ parallelarum illarum terminos (in linea Parabolica constitutos) connectentes, (quæ erunt propterea ipsi parabolæ deinceps inscriptæ,) erunt ut $\sqrt{:a^2+1}$. $\sqrt{:a^2+9}$. $\sqrt{:a^2+25}$. $\sqrt{:a^2\times 49}$ &c. (quippe quarum quadrata per 47 e 1. æquantur quadratis tam particularum a, quam differentiarum inter proximas quasque parallelas, hoc est, numerorum imparium.) Quæ quidem rectæ (parabolæ inscriptæ) quo plures fuerint, eò propius ad parabolicæ mensuram accedet earum omnium aggregatum; ita tamen ut ex omnibus sic aggregata recta sit ipsâ parabolicâ minor.



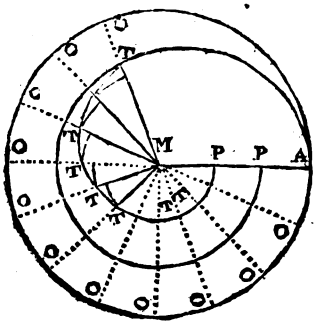
Sin velit aliqui rectam justa majorem (ut constet intra quos cancellos determinare possit parabolicæ longitudinem;) neque difficilis erit hæc investigatio, tangentium ope perficienda.

Si vero curva AOO, non supponatur Parabola, sed paraboloides Cubicale, Biquadricale, &c. Idem processus erit, mutatis mutandis, atque in Parabola. Sumendæ enim pro parallelarum differentiis, non 1, 3, 5, 7, &c. differentiæ numerorum Quadraticorum; sed 1, 7, 19, 37, &c. differentiæ numerorum cubicorum; vel 1, 15, 65, 175, &c. differentiæ numerorum Biquadraticorum; &c. prout Paraboloideos cujusq; natura postulet: adeoq; inscriptæ erunt $\sqrt{:a^2+1}$ $\sqrt{.a^2+49}$. &c. vel $\sqrt{:a^2+1}.\sqrt{:a^2+225}$ &c. & sic deinceps. Ut ex inferius tradendis pr. 45. patebit.

Digitized by Google

EAdem fere methodo, *Invenietur recta Spirali genuinæ quam-proximè æqualis.*

Si enim (per ea quæ dicta sunt prop. 5.) supponatur inscribi figuræ spirali alia ex quotlibet sectoribus similibus conflata: Erunt (propter spiralem) tam sectorum arcus, quam horum sinus sive recti sive versi, ut & radii, arithmetice proportionales. Radiorum autem continuum augmentum dicatur *a*. Si igitur a sectoris cujusvis arcus initio ad radium per ipsius terminũ ductũ demitti supponatur perpendicularis, erit illa ipsius arcus sinus rectus, cujus quadratum simul cum quadrato sinûs versi communi augmento *a* aucti, æquabitur quadrato rectæ Spirali inscriptæ: (per 47 e 1.) Sinus autem versus ille dicatur *v*, & totius circuli sui diameter *d*; erit igitur quadratum sinus recti (ex ductu sinûs versi *v* in diametri residuum $d-v$ factum) $vd-v^2$; & quadratum sinûs versi communi augmento aucti (nempe $v+a$) erit $v^2+2va+a^2$; & propterea quadratum inscriptæ (ex his conflatum) $vd+2va+a^2$. Cum autem (propter æquales similium Sectorum angulos) eadem sit ubiq; sinûs versi ad diametrum ratio, esto ea quam habet 1 ad *m* (quæ ratio major minorve reputanda erit prout singulorum sectorum anguli majores minoresve fuerint:) Adeoq; cum sit $1.m::v.d$, erit $d=vm$: & propterea quadratum rectæ spirali inscriptæ $vd+2va+a^2=vvm+2va+a^2$. Deniq;, cum fiat similium illorum sectorum deinceps positorum arcus, adeoq; & sinus versi, arithmetice proportionales, (ab o inchoati,) dicantur illi o, 1, 2, 3. &c. Erunt ergo inscriptæ illæ $\sqrt{:}\ om+oa+a^2$. $\sqrt{:}\ 1m+2a+a^2$ $\sqrt{:}\ 4m+4a+a^2$. $\sqrt{:}\ 9m+6a+a^2$. $\sqrt{:}\ 16m+8a+a^2$ Et sic deinceps Quò autem plures supponantur eidem figuræ spirali sectores inscribi, eò propius ad lineam spiralem accedet rectarum



sic

Digitized by Google

fic inſcriptarum aggregatum : quod tamen vera ſpirali perpetuo minus erit.

Si autem harum inſcriptarum prima omittatur, & illius vice poſt ultimam ſubjungatur quæ proximè erat inſecutura, (quod tantundem eſt atq; pro figura ex ſectoribus inſcripta, circumſcriptam ſubſtituere,) atq; tandem addatur a; habebitur ex omnibus aggregata recta quæ vera ſpirali major erit ; ſed quæ ad juſtam eo propius accedet quò plures ſupponantur Sectores adſcribi.

Et ſimili forma procedendum erit (mutatis mutandis) in aliis Spiralium generibus in Scholio Prop. 45. memoratis.

PROP. XXXIX. *Lemma.*

SI proponatur ſeries quantitatum in *Triplicata* ratione Arithmeticè-proportionalium, (ſive juxta ſeriem numerorum Cubicorum,) continuè crefcentium, a puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 8, 27, 64, &c.) propoſitum ſit inquirere quam habeat illa rationem ad ſeriem totidem maximæ æqualium?

Fiat inveſtigatio per modum inductionis (ut in prop. 1. & 19.) Eritq; $\frac{0+1=1}{1+1=2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}$. $\frac{0+1+8=9}{8+8+8=24} = \frac{3}{8} = \frac{1}{3}+\frac{1}{8}$. $\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108} = \frac{4}{12} = \frac{1}{4}+\frac{1}{12}$.

$\frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320} = \frac{5}{16} = \frac{1}{4}+\frac{1}{16}$

$\frac{0+1+8+27+64+125=225}{125+125+125+125+125+125=750} = \frac{6}{20} = \frac{1}{4}+\frac{1}{20}$.

$\frac{0+1+8+27+64+125+216=441}{216+216+216+216+216+216+216=1512} = \frac{7}{24} = \frac{1}{4}+\frac{1}{24}$.

Et ſic deinceps.

Ratio proveniens eſt ubiq; major quam ſubquadrupla, ſeu $\frac{1}{4}$.

Exceſ-

Digitized by Google

Excessus autem perpetuò decrescit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$. &c. aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis, numero quaternario, (ut patet;) ut sit rationis provenientis excessus supra subquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post o. Adeoq; ----

PROP. XL. *Theorema.*

SI proponatur series quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (sive juxta seriem numerorum cubicorum) continuè crescentium, a puncto vel o inchoatarum; ratio, quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, subquadruplam superabit; erítq; excessus, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post o; sive, quam habet radix cubica termini primi post o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.

Puta $\frac{l+1}{4} l^3 + \frac{l+1}{4l} l^3$ vel $\frac{n}{4} l^3 + \frac{n}{4l} l^3 = \frac{1}{4} n l^3 + \frac{1}{2} n l^2$.

Patet ex præcedente.

Cùm autem, crescente numero terminorum, excessus ille supra rationem subquadruplam ita continuò minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) Si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est. Adeóq; ----

PROP. XLI. *Theorema.*

SI proponatur series infinita quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium sive juxta seriem numerorum cubicorum) continue crescentium, a puncto seu o inchoatarum; erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1, ad 4.

Patet ex præcedente.

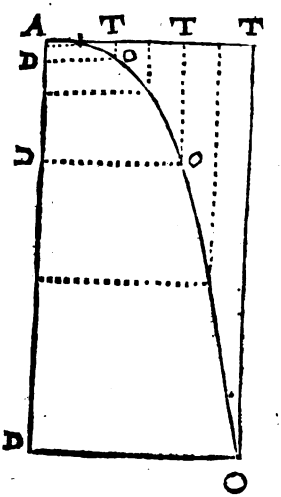
PROP.

Digitized by Google

PROP. XLII. *Corollarium.*

IDeoq; , *Complementum ſemi-paraboloidis cubicalis, AOT, eſt ad Parallelogrammum TD (ſuper eâdem vel æquali baſe æquè altum,) ut 1 ad 4. (Et, conſequenter, ipſum ſemiparaboloides ad idem Parallelogrammum, ut 3 ad 4.)*

Eſto enim Semiparaboloidis cubicalis AOD (cujus diameter AD, ordinatim applicatæ DO,DO, &c.) complementum AOT (cujus diameter AT, ordinatim-applicatæ TO, TO, &c.) Quoniam igitur (per pr. 45. Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. vel ipſis æquales AT, AT, &c. ſunt in ſubtriplicata ratione rectarum AD, AD, &c. vel ipſis æqualium TO, TO, &c. Erunt e contra ipſæ TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (conſtans ex infinitis rectis TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmetice-proportionalium) erit ad Parallelogrammum TD, per præced. (conſtans ex totidem ipſi TO maxime æqualibus) ut 1 ad 4. (Quod erat oſtendendum.) Et conſequenter, Semiparaboloides AOD (parallelogrammi reſiduum) ad idem parallelogrammum ut 3 ad 4.



PROP. XLIII. *Lemma.*

PAri methodo invenietur ratio ſeriei infinitæ quantitatum in ratione quadruplicata, quintuplicata, ſextuplicata, &c. Arithmeticè proportionalium, a puncto ſeu o inchoatarum, ad ſeriem

Digitized by Google

totidem maximæ æqualium. Nempe in Quadruplicatâ, erit ut 1 ad 5: in Quintuplicata, ut 1 ad 6: in Sextuplicata, ut 1 ad 7. Et sic deinceps.

Facto enim experimento patebit rationes inductione repertas ad has continuo propiùs accedere, ita ut differentia tandem evadat quâvis assignabili minor; adeoq; in infinitum continuata evanescet.

Operosas demonstrationes lineares non adjungo; quas tamen, siquis postulet, poterit ille (modo vacet) tales exquirere figurarum inscriptione & circumscriptione, vel etiam aliàs præstandas; (quales habet Archimedes pr. 10, & 11, de lin. spiral.) ostendendo, quòd ratio neq; major neq; minor est quam assignata. At mihi sufficere videntur illæ quas produxi, Cavallerii *Methodum Indivisibilium* (quoniam eam invenio a Geometris jam esse receptam) secutus.

Nota tamen eas quibus usus sum demonstrationibus, potius figuras inscribendas imitari, cum supponant primum terminum 0. Si quis vero figuras circumscribendas imitari mallet, fieri quidem & illud potest, modo primus terminus ponatur 1.

Notandum etiam, rationes inductione quærendas, in seriebus illis quarum processus est in Arithmetica proportionalium ratione quadruplicata (& sequentibus) magis implicatas esse quam præcedentium.

Puta in Biquadratis $\frac{l+1}{5} l^4 + \frac{l+1}{10l} 3l^4 + \frac{l+1}{30l^2} l^4 + \frac{-l-1}{30l^3} l^4$. Vel $\frac{n}{5} l^4 + \frac{3n}{10l} l^4 + \frac{n}{30l^2} l^4 - \frac{n}{30l^3} l^4 = \frac{1}{5} n l^4 + \frac{1}{10} n l^3 + \frac{1}{30} n l^2 - \frac{1}{30} n l$. (posito nempe termino primo 1, latere maximo l numero terminorum $n = l + 1$.)

In Surdesolidis autem $\frac{l+1}{6} l^5 + \frac{l+1}{2l} l^5 + \frac{l+1}{12l^2} l^5 + \frac{-l-1}{12l^3} l^5$. Vel $\frac{n}{6} l^5 + \frac{n}{3l} l^5 - \frac{n}{12l^2} l^5 - \frac{n}{12l^3} l^5 = \frac{1}{6} n l^5 + \frac{1}{3} n l^4 + \frac{1}{12} n l^3 - \frac{1}{12} l^2$.

Sed (quod nobis sufficit) ad debitam rationem ita continuè magis

magis accedunt, ut tandem differentia evadat quavis assignabili minor.

SCHOLIUM.

Si quis autem cupiat rationes hujusmodi, utut intricatas, quæ sequentibus seriebus finitis quibuscunq; conveniat, (puta in sextuplicatâ, septuplicatâ, &c. ratione Arithmeticè proportionalium) invenire: quomodo illud fiat deinceps dicetur in Schol. prop. 108.

PROP. XLIV. *Theorema.*

Deoq; si intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu 0 inchoatarum, & continuè crescentium pro ratione vel Arithmeticè-proportionalium, (quam seriem Lateralium sive *Primanorum* appello,) vel eorum quadratorum, cuborum, biquadratorum, &c. (quam appello seriem *Secundanorum*, *Tertianorum*, *Quartanorum*, &c.) Erit totius seriei ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ sequitur in hac Tabella. Nempe

Æqualium	$\frac{1}{1}$		1
Primanorum	$\frac{1}{2}$		2
Secundanorum	$\frac{1}{3}$		3
Tertianorum	$\frac{1}{4}$		4
Quartanorum	$\frac{1}{5}$		5
Quintanorum	$\frac{1}{6}$	Vel ut 1 ad	6
Sextanorum	$\frac{1}{7}$		7
Septimanorum	$\frac{1}{8}$		8
Octavanorum	$\frac{1}{9}$		9
Nonanorum	$\frac{1}{10}$		10
Decimanorum	$\frac{1}{11}$		11

Et sic deinceps. Ita ut fractionum Denominatores, sive Consequentes rationum, sint ab unitate Arithmetice proportionales; communis autem sive Numerator sive Antecedens 1.

Digitized by Google

PROP. XLV. *Corollarium.*

Hinc discimus methodum inveniendi aream complementi Parabolæ, & Paraboloideos Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis, aut superioris cujuslibet potestatis; & consequenter, etiam aream Parabolæ, aut Paraboloideos cujuscunq; potestatis. Quod ostendere pollicitus sum ad prop. 48. Con. Sect.

Nempe, cùm complementum Parabolæ (vel Semiparabolæ) sit series secundanorum, (ut diximus ad prop. 23;) complementum Paraboloidis cubicalis (vel semiparaboloidis,) series Tertianorum, (ut diximus ad prop 42;) atq; (eâdem ratione) complementum Paraboloidis Biquadraticalis, series Quartanorum; complementum Paraboloidis surdesolidalis, series Quintanorum; & sic deinceps: Erit horum ratio ad Parallelogrammum circumscriptum, (series nempe totidem maximo æqualium,) ea quæ est 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, & sic deinceps: juxta tabellam propositionis præcedentis. Et consequenter, ipsa Parabola, Paraboloides Cubicale, Biquadraticale, Surdesolidale, &c. (quæ nempe cum suis complementis æquantur Parallelogrammis circumscriptis) sunt ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6. &c.

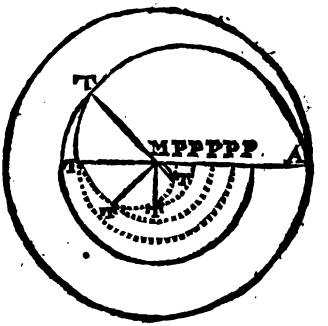
SCHOLIUM.

Et hoc quidem pacto licebit infinitis figuris curvilineis æquales rectilineas constituere. Quodq; in sola Parabola (summa cum admiratione) præstitit Archimedes (& post illum alii;) id nos in Paraboloide cujuscunq; potestatis jam præstitimus.

Quæ autem de Parabolis & Paraboloidibus hucusq; tradita sunt, aut etiam adhuc deinceps tradenda, possunt etiam Spiralibus facillimo negotio accommodari. Si enim supponamus rectam MT continuè augeri, non quidem in eadem ratione cum angulo PMT, (ut in Spirali Archimedea,) sed in ejusdem ratione duplicata, triplicata, quadruplicata, &c. orientur alia atq; alia Spiralium genera: quarum tamen ad peripheriam vel arcum (eo sensu quo dictum est in Schol. prop. 13. & 15.) ratio non

Digitized by Google

non minus innotescet (ut & figurarum adjacentium ratio ad circulum vel sectorem) quam in illa Archimedea. Exempli gratia. *Si angeatur recta MT in duplicata ratione anguli PMT; erit linea Spiralis (a principio inchoata) MT, ad arcum conterminum PT, ut 1 ad 3;* (quippe erit spiralis illa, series Secundanorum; arcus autem, series Æqualium:) *Et Figura adjacens erit ad conterminum Sectorem, ut 1 ad 4;* (nempe ut series Tertianorum ad seriem Æqualium:) *Et similiter, si crescat recta MT in anguli MPT ratione Triplicata, Quadruplicata, &c. Erit Spiralis (sensu quo supra) ad conterminum Arcum, ut 1 ad 4, 5, &c; & Figura adjacens ad sectorem conterminum, ut 1 ad 5, 6, &c.* Quæ omnia eodem modo (mutatis mutandis) demonstrabuntur, quo prop. 5, 24. &c. Atq; hinc quidem spiralium doctrina in immensum augeri possit. Cum autem id suo quilibet Marte per jam dicta satis possit intelligere, neq; nobis sit animus labore supervacaneo hæc ulterius ampliandi: sufficiat id in transitu monuisse.



Sed & hinc etiam facilis esset transitus ad Spirales non tantum in plano, sed in solido descriptas, puta in superficiebus Coni & Sphæræ, sive etiam conoidum & sphæroidum, rite considerandas; &, ad spirales aut Circulos in Cylindro comparandas: Figuras item illis adjacentes, ad figuras adjacentes hisce. Adhibitis tamen iis, quæ de seriebus auctis & diminutis deinceps secuturæ sunt, propositionibus. Hæc autem omnia, ne nimius sim, intacta prætereunda judico: Cum ea quilibet, ex iis quæ hic tradita sunt vel deinceps tradenda, facile possit deducere.

PROP. XLVI. *Lemma.*

ITem (*per prop.* 44.) Data ratione quam habet series una, cujuslibet potestatis, (ad seriem æqualium;)

Digitized by Google

reperitur ratio quam habet alia ſeries alterius cujuſvis poteſtatis, (ad ſeriem item æqualium:) inveniendo nempe homologum terminum progreſſionis Arithmeticæ.

Ut, ſi Quadratorum ſive Secundanorum ſeries ſit $\frac{1}{3}$ ſeriei æqualium; erit ſeries Lateralium ſive Primanorum $\frac{1}{2}$ ſeriei æqualium: Quia, ut ſeries Primanorum media eſt inter ſeriem Æqualium & ſeriem Secundanorum, ſic 2 (conſequens rationis quæſitæ Primanorum) eſt media Arithmetica inter 1 & 3 (conſequentes rationum Æqualium & ſecundanorum.) Sic cum cuborum ſive Tertianorum ratio ſit $\frac{1}{4}$ ſive 1 ad 4, inter quam ſeriem & ſeriem æqualium, duarum poteſtatum ſeries interjiciuntur; quærendæ ſunt duæ mediæ Arithmeticæ inter 1 & 4, puta 2 & 3, quarum illa Primanis, hæc Secundanis convenit. Et ſic in cæteris.

Et ſimiliter, ſi quærenda ſit ratio ſuperioris poteſtatis ſeriei conveniens; id reperitur progreſſionem continuando ad terminum quæſitum uſq; : Ut, ſi ſeries Quartanorum rationem habent, ad ſeriem æqualium, eam quæ eſt 1 ad 5 ſive $\frac{1}{5}$; ſeries ſextanorum habebit rationem 1 ad 7: quia in progreſſione Arithmetica ubi terminus (poſt unitatem) quartus eſt 5, terminus ſextus erit 7. & pariter in reliquis.

PROP. XLVII. *Lemma.*

ATq; hæc regula non minus valebit ſi exponatur ſeries quantitatum quarumlibet (non quidem juxta ſeriem Primanorum, ſed) juxta quamvis aliam Tabellæ ſeriem, & de illarum Quadratis, Cubis, &c. inquiratur.

Verbi gratia. Si intelligatur ejuſmodi ſeries quantitatum quarumlibet ſecundum ſeriem Secundanorum (quibus aſſignatur in Tabella ratio 1 ad 3) diſpoſitarum: harum quadratis conveniet ratio 1 ad 5; (quia 1, 3, 5, ſunt arithmetice proportionales;) & cubis conveniet ratio 1 ad 7; & ſic deinceps

Digitized by Google

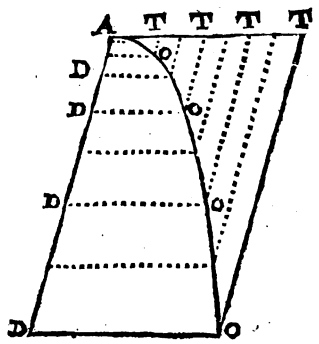
ceps; quia 1,3,5,7,&c. sunt Arithmetice proportionales, prout Unitas, Radix, Quadratum, Cubus,&c. sunt potestates proximè sequentes & Geometricè proportionales.

Nec hoc aliud est, quam quod habetur in Tabella; nam si quantitates assumptæ sint series Secundanorum, cujus ratio est $\frac{1}{3}$; earum quadrata erunt series Quartanorum, cujus ratio $\frac{1}{5}$; & earundem cubi erunt series Sextanorum, cujus ratio $\frac{1}{7}$; &c. ut dictum est.

PROP. XLVIII. *Corollarium.*

ET consequenter, *Conoides vel Pyramidoides complemento Semi-parabolæ (circa ipsius diametrum) aptandum, est ad Cylindrum vel Prisma super æquali basi æquè altum, ut* 1 *ad* 5.

Nempe si complementum semi-parabolæ rectæ, AOT, manente recta AT, circumvolvatur, ut describatur Conoides rectum: vel, universaliter, si (juxta methodum a nobis indicatam prop. 5, 6,9. Con. Sect.) diametro vel axi AT, ordinatim applicentur circuli, vel similia quævis plana, quorum vel radii vel rectæ similiter positæ rationem eandem habeant inter se quã rectæ TO,TO, &c. ut compleatur Conoides vel Pyramidoides sive rectum sive inclinatum: dico illud Conoides vel Pyramidoides esse ad Cylindrum vel Prisma super eadem basi æquè altum ut 1 ad 5. Nam, cùm rectæ omnes TO, TO, &c. sunt series Secundanorum, (quibus convenit ratio 1 ad 3;) similia quælibet plana super has rectas similiter constituta, erunt inter se ut harum rectarum quadrata; sive in duplicata ratione rectarum TO,TO; At ratio seriei rectarum illarum conveniens (seriei quippe secundanorum



Digitized by Google

eundanorum) est 1 ad 3; ergo seriei planorum conveniet ratio 1 ad 5: quia nempe 1, 3, 5, sunt Arithmetice-proportionales: (prout Unitas, Radix, & quadratum sunt Geometricè-proportionales.) Et quidem, si rectæ TO, TO, &c. sint series Secundanorum; earum quadrata (vel plana quadratis proportionalia) erunt series quartanorum; cui in Tabella convenit ratio 1 ad 5.

PROP. XLIX. *Corollarium.*

ET similiter; *Si complemento semiparaboloidis cubicalis aptetur (circa ipsius Diametrum) Conoides vel Pyramidoides; erit hoc ad Cylindrum vel Prisma (super eadem vel æquali basi æquè altum,) ut* 1 *ad* 7.

Nam, cum rectæ TO, TO, &c. (in complemento Semiparaboloidis Cubicalis,) sint series Tertianorum, quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4; horum quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) seriei conveniet ratio 1 ad 7; quia 1, 4, 7, sunt Arithmetice proportionales. Vel etiam, quia plana sunt series Sextanorum, quibus in Tabella assignatur ratio 1 ad 7.

PROP. L. *Corollarium.*

ET pariter; *si semiparaboloidum aliorum (puta Biquadraticalium, Surdesolidalium, &c.) complementis aptetur (circa eorum diametros) Conoides vel Pyramidoides aliquod; habebit illud ad Cylindrum vel Prisma (super æquali basi æquè altum) rationem notam (puta* 1 *ad* 9, 1 *ad* 11, *&c.*)

Cum enim complementorum illorum rectæ sint series quartanorum, quintanorum, &c. adeoque rationes in Tabellâ assignatas habeant 1 ad 5, 1 ad 6, &c. series quadratorum (vel planorum quadratis proportionalium) rationem habebunt 1 ad 9, 1 ad 11, &c. quia 1, 5, 9, vel 1, 6, 11, &c. sunt arithmetice

Digitized by Google

metice proportionales. Vel etiam, quia si rectæ sint series Quartanorum, Quintanorum, &c. plana similia ad has rectas similiter posita, erunt series Octavanorum, Decimanorum, &c. quibus convenit ratio 1 ad 9, 1 ad 11, &c.

SCHOLIUM.

Atq; hoc pacto figurarum solidarum superficiebus curvi comprehensarum ingens multitudo reduci possunt ad alias superficiebus planis comprehensas; & corpora non modo conic (quod docuerunt veteres) sed & alia quamplurima conoidica, ad cylindrum reduci. Quod nescio an quispiam alius antehac ostenderit.

PROP. LI. *Lemma.*

Juxta eandem regulam (prop. 46, 47.) Si exponatur series quantitatum quarumlibet, juxta quamlibet Tabellæ seriem; de illarum radicibus quadraticis, cubicis, &c. aut quibusvis intermediis potestatibus, pariter inquirendum erit.

Exempli gratia; si exponantur infinita Quadrata (vel quælibet plana similia) juxta seriem Quartanorum; (cui assignatur, in Tabella, ratio 1 ad 5:) series laterum (vel rectarum in illis similiter positarum) rationem habebit (ad seriem æqualium) 1 ad 3: quia 1, 3, 5, sunt arithmetice proportionalia: vel etiam, quia ubi plana sunt series Quartanorum, eorum latera erunt series secundanorum, quibus assignatur in Tabellâ ratio 1 ad 3.

Sic, si exponantur cubi infiniti (vel quælibet similia solida) juxta seriem sextanorum, quibus in Tabella congruit ratio 1 ad 7; eorum lateribus cubicis (vel rectis in his similiter positis) conveniet ratio 1 ad 3; & horum laterum quadratis (vel planis in cubis illis similiter positis) ratio 1 ad 5; quia duarum mediarum arithmeticarum inter 1 & 7, minor est 3, major 5. (sunt enim 1, 3, 5, 7, arithmetice proportionalia: duas autem ejus Arithmeticas interpono inter 1 & 7; quia totidem supponimus medias Geometricas. inter unitatem & cubum, nempe Latus

& quadratum; sunt enim Unitas, Latus, Quadratum, Cubus, Geometrice proportionalia. Et quidem si Cubi sint series sextanorum, Latera erunt series secundanorum; & laterum Quadrata, series quartanorum; quibus in Tabella conveniunt rationes 1 ad 3, 1 ad 5.

Si vero quantitates expositæ in eadem serie sextanorum, essent Quadrata (vel plana quælibet similia) eorum lateribus conveniret ratio 1 ad 4. Quia inter 1 & 7 media Arithmetica est 4; sicut inter unitatem & quadratum media Geometrica est Radix vel Latus. Et quidem si Quadrata sint series sextanorum, eorum Latera erunt series tertianorum; quibus in Tabella convenit ratio 1 ad 4.

PROP. LII. *Corollarium.*

ET propterea; *Ex cognitis rationibus quas habent Conoidea & Pyramidoidea, prop.* 48, 49, 50, *memorata,* (*ad Cylindrum vel Prisma, super æquali basi æquealtum*;) *cognoscentur rationes quas habent plana illa unde constituuntur, ad Parallelogrammum circumscriptum. Nempe complementum Semiparabolæ ut* 1 *ad* 3: *complementa Semiparaboloidis Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis &c. ut* 1 *ad* 4, 1 *ad* 5, 1 *ad* 6. *&c.*

Si enim Conoidea ad Pyramidoidea illa cognoscantur esse series quartanorum, Sextanorum, Octavanorum, Decimanorum, &c. Eisq; convenire rationes 1 ad 5, 1 ad 7, 1 ad 9, 1 ad 11, &c, Eorum lateribus (quæ propterea sunt series Secundanorum, Tertianorum, quartanorum, Quintanorum, &c.) convenient rationes 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, 1 ad 6, &c. Quia 1,3,5, item 1,4,7, item 1,5,9, item 1,6,11, &c. sunt Arithmeticè proportionales.

PROP. LIII. *Lemma.*

HIS intellectis; patet aditus ad investigationem [illegible]onum quas (ad seriem maximæ æqualiū) [illegible]bere dicantur ejusmodi series Radicum Quadratarum, Cubicarum, Biquadraticarum, &c. nume-

Digitized by Google

numerorum ſive quantitatum arithmetice-proportionalium, a puncto vel 0 inchoatarum; (puta $\sqrt{0}$, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, &c. $\sqrt{c}0$, $\sqrt{c}1$, $\sqrt{c}2$, $\sqrt{c}3$, &c. $\sqrt{qq}0$, $\sqrt{qq}1$, $\sqrt{qq}2$, $\sqrt{qq}3$, &c.) Quas appello ſeries Subſecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum; &c.

Exſempli gratia. Si exponantur ejuſmodi infinita Quadrata Arithmeticè-proportionalia, ſive juxta ſeriem Primanorum; quibus in Tabellâ aſſignatur ratio 1 ad 2: Eorum Lateribus, (hoc eſt, ſeriei ſubſecundanorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{2}$ (ſive 2 ad 3;) quia 1, $1\frac{1}{2}$, 2, ſunt Arithmetice proportionalia.

Item, ſi ſupponantur ejuſmodi infiniti Cubi Arithmeticè-proportionales, ſive juxta ſeriem Primanorum; quibus convenit in Tabella, ratio 1 ad 2. Illorum radicibus cubicis, (hoc eſt ſeriei ſubtertianorum) conveniet ratio 1 ad $1\frac{1}{3}$ (vel 3 ad 4:) & harum radicum quadratis, ratio 1 ad $1\frac{2}{3}$ (vel 3 ad 5:) quia ſcilicet 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2. ſunt Arithmeticè-proportionalia; ſicut Unitas, radix, quadratum, & Cubus, ſunt Geometricè-proportionalia.

Et pari modo, ſi infinita Biquadrata, Surdeſolida, &c. conſtituta intelligantur juxta ſeriem Primanorum, quibus convenit ratio 1 ad 2; eorum radicibus Biquadraticis, Surdeſolidalibus, &c. convenient rationes 4 ad 5, 5 ad 6, &c. vel 1 ad $1\frac{1}{4}$, 1 ad $1\frac{1}{5}$ &c. quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, 2; item 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, $1\frac{4}{5}$, 2; &c. ſunt Arithmetice-proportionalia. Adeoq; ...

PROP. LIV. *Theorema.*

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, a puncto ſeu 0 inchoatarum, & continue creſcentium pro ratione Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. numerorum Arithmeticè proportionalium; (quam appello ſeriem *Subſecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c.*) Erit totius ratio ad ſeriem totidem maximè æqualium, ea

Digitized by Google

quæ ſequitur in hac Tabella: Nempe

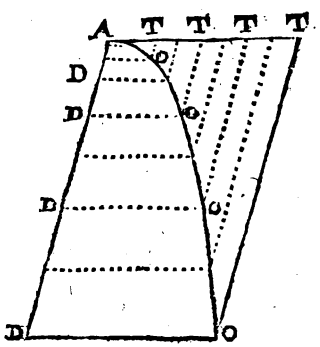
Subſecundanorum	$\frac{2}{1}$	Vel ut 1 ad	$1\frac{1}{2}$
Subtertianorum	$\frac{3}{2}$		$1\frac{1}{3}$
Subquartanorum	$\frac{4}{3}$		$1\frac{1}{4}$
Subquintanorum	$\frac{5}{4}$		$1\frac{1}{5}$
Subſextanorum	$\frac{6}{5}$		$1\frac{1}{6}$
Subſeptimanorum	$\frac{7}{6}$		$1\frac{1}{7}$
Suboctavanorum	$\frac{8}{7}$		$1\frac{1}{8}$
Subnonanorum	$\frac{9}{8}$		$1\frac{1}{9}$
Subdecimanorum	$\frac{10}{9}$		$1\frac{1}{10}$
	$\frac{11}{10}$		

Et ſic deinceps.

Patet ex præcedente.

PROP. LV. *Coroll.*

ERgo, *Planum ſemi-parabolæ (vel etiam Parabolæ) eſt ad Parallelogrammum circumſcriptum, ut 2 ad 3. (Et conſequenter ipſius complementum eſt ad idem Parallelogrammum ut 1 ad 3.)*



Eſt enim Planum Semiparabolæ (aut etiam Parabolæ) ſeries infinita ſubſecundanorum (per 8 prop. Con. Sect.) Parallelogrammum autem ſeries totidem maximæ æqualium: Ergo illud ad hoc ut 1 ad $1\frac{1}{2}$ vel ut 2 ad 3. (et, conſequenter, ipſius complementum, nempe Parallelogrammi reſiduum, ut 1 ad 3.)

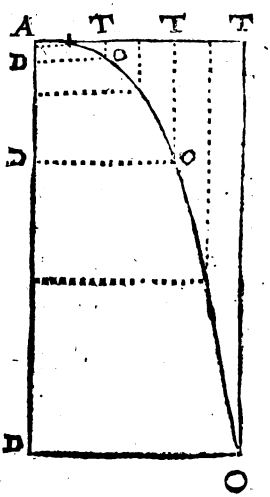
PROP.

Digitized by Google

PROP. LVI. *Coroll.*

ITem, *Planum Semi-paraboloidis (vel etiam Paraboloidis) cubicalis, est ad Parallelogrammum circumscriptum, ut 3 ad 4. (& consequenter, ipsius Complementum, est ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.)*

Cum enim (per 45. Prop. Con. Sect.) ordinatim-applicatę in Paraboloide cubicali sint in subtriplicata ratione diametrorum (sive distantiarum a vertice) erit planum ex illis omnibus conflatum series subtertianorum; quæ se habet ad seriem totidem maximo æqualium (hoc est, ad Parallelogrammum circumscriptum,) ut 1 ad 1 $\frac{1}{3}$, sive ut 3 ad 4. (Et consequenter, ipsius complementum, nempe parallelogrammi residuum, est ad idem Parallelogrammum, ut 1 ad 4.)



PROP. LVII. *Corollarium.*

EOdem modo, *Planum Semi-paraboloidis (vel Paraboloidis) Biquadraticalis, Surdesolidalis, aut superioris cujusvis potestatis, ratio ad Parallelogrammum circumscriptum nota erit; puta ut 4 ad 5, 5 ad 6, &c. (Et consequenter, ipsorum etiam complementa ad eadem Parallelogramma rationem notam habebunt; puta ut 1 ad 5, 1 ad 6. &c.)*

Sunt enim illa plana series subquartanorum, subquintanorum, &c. ideoque, ad series Æqualium, ut 4 ad 5, 5 ad 6; &c. &, consequenter, eorum complementa (quæ quidem sunt series Quartanorum, Quintanorum, &c.) ut 1 ad 5, 1 ad 6, &c.

Digitized by Google

SCHOLIUM.

Adeoque & per hanc etiam Tabellam, licet Parabolarum, & Paraboloidium cubicalis, biquadraticalis, aut superioris cujuslibet potestatis, & eorundem etiam Complementorum, aream invenire: quod pollicitus sum ad Prop. 48. Con. Sect. & supra præstiti ad Prop. 45. hujus.

PROP. LVIII. *Lemma.*

TAndem, *ope ejusdem Regulæ* (*prop.* 46.) Si proponatur ejusmodi series infinita quantitatum, a puncto vel o inchoatarum, & continuè crescentium, pro ratione Potestatis (non simplicis tantum cujusvis, sed &) compositæ: ratio quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, investigatur. Puta Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. aut etiam Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Vel Radices Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c. Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c; aut Subsecundanorum, Subtertianorum, Subquartanorum, &c. Aut etiam quocunq; modo compositæ.

Exempli gratia, Cum series subtertianorum (puta $\sqrt{c}\,0$, $\sqrt{c}\,1$, $\sqrt{c}\,2$, $\sqrt{c}\,3$, &c.) rationem habeant (ad seriem totidem maximæ æqualium) eam quæ est 3 ad 4, seu 1 ad $1\frac{1}{3}$: Eorum quadrata (quę eadem sunt & radices cubicę secundanorum, puta $\sqrt{c}\,0$, $\sqrt{c}\,1$, $\sqrt{c}\,4$, $\sqrt{c}\,9$, &c.) rationem habebunt ad totidem maxime æqualia, eam quæ est 1 ad $1\frac{2}{3}$, vel 3 ad 5. Quia nempe 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, vel $\frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}$, sunt arithmetice proportionalia.

Pariter, seriei subquartanorum cubi, vel (quod tantundem est) radices biquadraticæ seriei cuborum vel tertianorum; rationem habebunt ad seriem Æqualium, ut 4 ad 7. Cum enim series subquartanorum rationem habeat in Tabella 1 ad $1\frac{1}{4}$ vel

4

Digitized by Google

4 ad 5 : eorum cubi rationem habebunt (ad ſeriem totidem maximo æqualium) ut 1 ad $1\frac{1}{4}$, vel 4 ad 7. Quia nempe 1, $1\frac{1}{4}$, $1\frac{2}{4}$, $1\frac{3}{4}$, vel $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{4}$, $\frac{7}{4}$, ſunt Arithmetice-proportionalia, ſicut Unitas, Radix, Quadratum, Cubus, &c. ſunt Geometrice-proportionalia.

Et ſimiliter in poteſtatibus magis adhuc compoſitis; puta Radices quadraticæ cuborũ ſeriei ſubquintanorum. Nam ſeriei ſubquintanorũ convenit ratio 1 ad $1\frac{1}{5}$ vel 5 ad 6; ergo eorum cubis conveniet ratio 1 ad $1\frac{3}{5}$ vel 5 ad 8 (quia nempe 1, $1\frac{1}{5}$, $1\frac{2}{5}$, $1\frac{3}{5}$, vel $\frac{5}{5}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$, ſunt Arithmetice-proportionalia;) & eorũ Radicibus quadratis, ratio 1 ad $1\frac{1}{10}$, vel 10 ad 13, (quia nempe $1\frac{1}{10}$ eſt medium Arithmeticum inter 1 ad $1\frac{3}{5}$, ſunt enim 1, $1\frac{1}{10}$, $1\frac{6}{10} = 1\frac{3}{5}$ vel $\frac{10}{10}$, $\frac{13}{10}$, $\frac{16}{10} = \frac{8}{5}$ Arithmetice proportionalia,) Vel etiam cum radices quadratiçæ ſubquintanorum ſint ſeries ſubdecimanorum; cui convenit ratio 10 ad 11 vel 1 ad $1\frac{1}{10}$: Harum radicum Cubi rationem habebunt eam quæ eſt 10 ad 13 vel 1 ad $1\frac{3}{10}$: Quia 1, $1\frac{1}{10}$, $1\frac{2}{10}$, $1\frac{3}{10}$ vel $\frac{10}{10}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{12}{10}$, $\frac{13}{10}$, ſunt quatuor termini arithmetice proportionales.

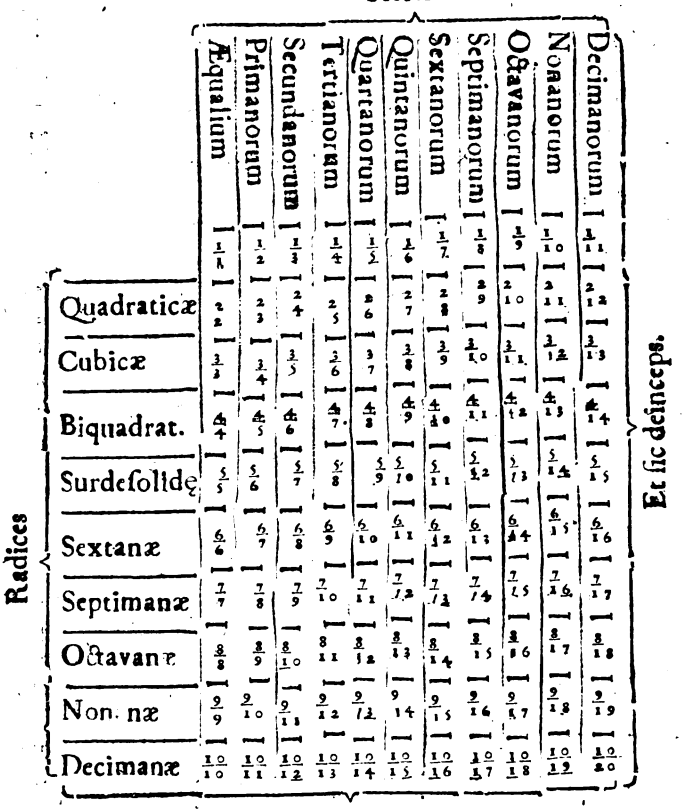
Atque eodem modo, in ſeriebus aliarum Poteſtatum utcunque compoſitarum, earundem ratio ad ſeriem æqualium inveſtigabitur. Adeoque ---

PROP. LIX. *Theorema.*

SI intelligatur ſeries infinita quantitatum, a puncto ſeu o inchoatarum, & continuè creſcentium pro ratione poteſtatis cujuſvis ex ſimplicibus (prop. 44 & 54 memoratis) compoſitæ; erit totius ratio ad ſeriem totidem maximæ æqualium, ea quæ ſequitur in hac Tabella. Nempe

Radices

Seriei



PROP. LX. *Corollarium.*

ERgo, *Conoidea & Pyramidoidea Parabolica & Paraboloidica; quæ nempe Parabolæ, Paraboloidi cubicali, biquadraticali, surdesolidali, &c. aptantur; sunt ad Cylindrum et prisma circumscriptum (vel aliud quodvis super æquali basę æquè altum) ut 2 ad 4, 3 ad 5, 4 ad 6, 5 ad 7. &c.*

Cum

Digitized by Google

Cum enim Parabolæ, & Paraboloidum illorum plana sint series rectarum in ratione subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, subquintanorum, &c. sive ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, surdesolidæ, &c. Primanorum: Conoidea & Paraboloidea sic aptata, sunt series planorum in duplicata ratione istarum rectarum; & propterea, ut radices quadraticæ, cubicæ, biquadraticæ, surdesolidæ &c. secundanorum: quibus in tabella assignantur rationes illæ 2 ad 4, 3 ad 5, 4 ad 6, 5 ad 7, &c.

PROP. LXI. *Corollarium.*

Sed & hinc innotescit methodus quadrandi non modò Parabolam sed & Paraboloidea omnia (eorúmq; complementa) non modò ea quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem simplicis alicujus potestatis, (de quibus dictum est prop. 55, 56, 57, item prop. 23, 45.) Sed & juxta rationem potestatis cujusvis ex simplicibus compositæ. Puta; si ordinatim-applicatæ sint in diametrorum ratione duplicatæ subtriplicata, subquintuplicata, subseptuplicata, &c. vel triplicatæ subquadruplicata, subquintuplicata, &c. rationem habebunt ad Parallelogrammum circumscriptum eam quam habent 3 ad 5, 5 ad 7, 7 ad 9, &c. 4 ad 7, 5 ad 8, &c. Et eorum complementa (quorum ordinatim-applicatæ erunt propterea in suarum diametrorum ratione subduplicatæ triplicata, quintuplicata, septuplicata, &c. item subtriplicatæ quadruplicata, quintuplicata, &c.) rationem habebunt 2 ad 5, 2 ad 7, 2 ad 9, [illegible], 3 ad 8, &c. Et similiter in cæteris: juxta [illegible] *cedentis Tabellæ, prop. 59.*

Nam si ordinatim applicatæ [illegible] ratione duplicatæ subtriplicata, erit plan[illegible] rum quę se habent ad invicem ut quadrata [illegible] (vel radices cubicæ quadratorum) [illegible]

Digitized by Google

proportionalium ſive ut radices cubicæ ſecundanorum; quibus in Tabellâ convenit ratio 3 ad 5.

Et hujus complementum ordinatim-applicatas habebit in diametrorum ſuarum ratione ſubduplicatæ triplicata (quod tali argumento probabitur, quo uſus ſum ad Prop. 23.) & propterea planum illud erit ſeries radicum quadraticarum cuborum ſive Tertianorum; quibus aſſignatur in Tabellâ ratio 2 ad 5.

Et pariter de aliis judicandum.

SCHOLIUM.

Atque hoc pacto aliæ adhuc figuræ curvilineæ (præter eas quas innuimus ad Prop. 45, & 57.) ad æquales rectilineas reducuntur. Nempe omnia cujuſcunque generis Paraboloidea, & eorum complementa.

PROP. LXII. *Corollarium.*

Atq; exinde etiam patet methodus ad æqualia Cylindros & priſmata reducendi Conoidea & Pyramidoidea omnia Parabolica & Paraboloidica (non modo qualia memorantur prop. 60, ubi planorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſimplicis alicujus poteſtatis, ſed &) etiam quæ aptantur ejuſmodi Paraboloidibus (qualia memorantur prop. 61.) quorum ordinatim-applicatæ procedunt juxta rationem ſeriei alicujus poteſtatis compoſitæ.

Exſempli gratia. Si paraboloidis ordinatim applicatæ ſint in diametrorum ratione ſubtriplicatæ-duplicata (vel ſubtriplicata duplicatæ) erit iſtius planum rectarum ſeries infinita in ratione radicum cubicarum ſecundanorum: & propterea Conoides vel Pyramidoides erit ſeries totidem planorum in earundem rectarum ratione duplicata, ideoque radicum cubicarum Quartanorum; & propterea (juxta tabellam Prop. 59.) ad Cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 3 ad 7.

Item, ſi Paraboloidis ordinatim-applicatæ ſint in diametrorum ratione ſubquadruplicatæ triplicata; erunt plana Conoi-

dis

dis vel Pyramidoidis, in earundem diametrorum ratione ſubquadruplicatæ-ſextuplicata (ſive, quod tantundem valet, ſubduplicatæ-triplicata,) ideoque Conoides vel Pyramidoides illud (ex iſtorum planorum ſerie conflatum) ad cylindrum vel Priſma circum-ſcriptum, ut 4 ad 10, vel 2 ad 5.

Et pariter in aliis juxta tenorem Tabellæ.

PROP. LXIII. *Corollarium.*

EOdem modo; Eorundem Semi-Paraboloidum complementis aptata Conoidea & Pyramidoidea, ad æqualia Cylindros & Priſmata reducuntur.

Exempli gratia. Si ſemi paraboloidis complementum ordinatim applicatas habeat in diametrorum ratione ſubduplicatæ triplicata, erit planum illud rectarum ſeries infinita in ratione radicum-quadraticarum cuborum ſive Tertianorum, & proinde Conoides vel Pyramidoides huic aptatum, erit ſeries totidem Planorum in earundem rectarum ratione duplicata, adeoque in diametrorum ratione ſubduplicatæ-ſextuplicata (ſeu, quod tantundem valet, in diametrorum ratione triplicata:) erit igitur ad cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 2 ad 8, vel 1 ad 4.

Item, ſi ſemi-paraboloidis complementum ordinatim-applicatas habeat in diametrorum ratione ſubtriplicatæ-quadruplicata; erunt plana Conoidis vel Pyramidoidis in earundem diametrorum ratione ſubtriplicatæ-octuplicata; & propterea ut radices cubicæ octavanorum; adeoque Conoides vel Pyramidoides illud, ad cylindrum vel Priſma circumſcriptum, ut 3 ad 11.

Et pariter de aliis judicandum eſt juxta Tabellam præmiſſam.

SCHOLIUM.

Docuimus igitur, quo modo Parabolæ & Paraboliodea omnia cujuſcunque generis, & eorum complementa, ad Parallelogramma: Et eorundem Conoidea & Pyramidoidea ad cylindros & Priſmata; reduci poſſunt. Adeoque infinita Problemata

Digitized by Google

mata solvimus quæ nemo (quantum scio) antea suscepit, nedum exsequutus est.

Placet autem, adhuc ex Tabellis omnibus præcedentibus (Prop. 44, 54, 59.) hoc universale Theorema colligere, (quod quidem convenit cum Regula Prop. 46.) Nempe ---

PROP. LXIV. *Theorema.*

SI intelligatur series infinita quantitatum, a puncto seu o inchoatarum, & continue crescentium pro ratione cujuscunq; potestatis, sive simplicis sive ex simplicibus compositæ; erit totius ratio, ad seriem totidem maximæ æqualium, ea quæ est Unitatis ad Indicem istius potestatis unitate auctum.

Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. (sive potestatis Lateralis, Quadraticæ, Cubicæ, Biquadraticæ, &c.) indicem statuo 1, 2, 3, 4, &c. subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. (sive Radicum quadraticarum, cubicarum, biquadraticarum, &c. primanorum, sive arithmetice proportionalium) indicem statuo $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. Potestatis cujusvis compositæ indicem facio ex componentium indicibus compositum: Puta secundanorum cubi (vel Tertianorum quadrata) indicem habent $6 = 2 \times 3$: subsecundanorum Radices cubicæ (vel subtertianorum Radices Quadraticæ) indicem habent $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$: Cubi Radicum quadraticarum Quintanorum, indicem habebunt $\frac{1}{2}\frac{5}{5} = 3 \times \frac{1}{2} \times 5$.

Rationes autem his potestatibus (in Tabellis) assignatæ, sunt hujusmodi. Puta, Primanis, Secundanis, Tertianis, Quartanis, &c. 1 ad 2, 1 ad 3, 1 ad 4, 1 ad 5, &c. hoc est 1 ad 1 + 1, 1 ad 2 + 1, 1 ad 3 + 1, 1 ad 4 + 1, &c. Subsecundanis, Subtertianis, subquartanis, &c. 2 ad 3, 3 ad 4, 4 ad 5 &c. vel 1 ad $1\frac{1}{2}$, 1 ad $1\frac{1}{3}$, 1 ad $1\frac{1}{4}$, &c. hoc est 1 ad $\frac{1}{2}$ + 1, 1 ad $\frac{1}{3}$ + 1, 1 ad $\frac{1}{4}$ + 1, &c. Tertianorum quadratis (sive sextanis) 1 ad 7, hoc est, 1 ad 6 + 1. Tertianorum Radicibus quadraticis 2 ad 5, sive 1 ad $\frac{1}{2}$, hoc est 1 ad $\frac{1}{2}$ + 1. Subsecundanorum radicibus cubicis (sive subsextanis) 6 ad 7, sive 1 ad $\frac{1}{6}$, hoc est 1 ad $\frac{1}{6}$ + 1. Cubis radicum quadraticarum quintanorum, (sive quindecimanorum

Digitized by Google

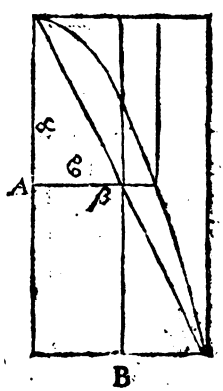
rum radicibus quadraticis,) 2 ad 17, sive 1 ad $\frac{17}{2}$, hoc est 1 ad $\frac{15}{2}+1$. (Et sic de cæteris.) quod affirmat Theorema. Sin Index supponatur irrationalis, puta $\sqrt{3}$; erit ratio, ut 1 ad $1+\sqrt{3}$. &c.

PROP. LXV. *Theorema.*

EX cognita ratione quam habet quælibet series ad seriem Æqualium, cognoscitur ratio quam habet quælibet ad quamlibet aliam.

Exempli gratiâ. Parabola ad triangulum, (hoc est series subsecundanorum ad seriem primanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{2}$ vel ut 4 ad 3. Semi-parabolæ complementum ad Triangulum, vel etiam Conus ad Conoides Parabolicum, (hoc est series secundanorum ad seriem primanorum,) ut $\frac{1}{3}$ ad $\frac{1}{2}$, vel ut 2 ad 3. Semi-parabola ad suum complementum, (hoc est series subsecundanorum ad seriem secundanorum,) ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{1}{3}$, vel ut 2 ad 1. Sic Parabola ad paraboloides cubicale, ut $\frac{2}{3}$ ad $\frac{3}{4}$, vel ut 8 ad 9: Et Conoides illius ad Conoides hujus, ut $\frac{2}{4}$ ad $\frac{3}{5}$, vel ut 5 ad 6. Paraboloides cubicale ad Biquadraticale, ut $\frac{3}{4}$ ad $\frac{4}{5}$, vel ut 15 ad 16: Et Conoides illius ad conoides hujus, ut $\frac{3}{5}$ ad $\frac{4}{6}$ vel ut 9, ad 10. Et sic in aliis.

Intellige; si, easdem vel æquales habeant & bases & altitudines (aut saltem reciprocatas:) Nam si diversas habeant vel bases vel altitudines vel utraque, ratio seriei unius ad aliam, componitur ex rationibus & basium & altitudinum & ea quæ est serierum propria. Puta si Parabolæ basis B altitudo A, Trianguli basis $\mathcal{C}$ altitudo α; erit parabola illa ad Triangulum, ut $\frac{2}{3}$ A B ad $\frac{1}{2}\alpha\mathcal{C}$, vel 4 A B ad 3 $\alpha\mathcal{C}$ & pariter in cæteris. Item, si Trianguli basis B, altitudo A; & Parabolæ basis β, altitudo α, erit Parabola ad Triangulum ut $\frac{2}{3}\alpha\beta$ ad $\frac{1}{2}$ A B, vel $4\alpha\beta$ ad 3 A B.



Demonstratio patet. Cum enim Parabola A B sit $\frac{2}{3}$ Parallelogrammi A B; & Triangulum $\alpha\mathcal{C}$. $\frac{1}{2}$ Parallelogrammi $\alpha\mathcal{C}$ erit illa ad hoc ut $\frac{2}{3}$ A B ad $\frac{1}{2}\alpha\mathcal{C}$. Et similiter aliis,

PROP. LXVI. *Theorema.*

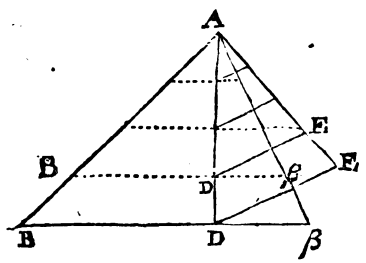
EX cognita quantitate seriei alicujus integræ, cognoscitur quantitas ejusdem obtruncatæ.

Puta, Si A B Triangulum sit $\frac{1}{2}$ A B Parrallelogrammi; & a c Triangulum, $\frac{1}{2}$ a c Parallelogrammi: erit residuum Trapezium, $\frac{1}{2}$ A B $-\frac{1}{2}$ a c. Item A B Parabola $\frac{2}{3}$ A B parallelogrammi circumscripti; & $a\beta$ parabola $\frac{2}{3}$ $a\beta$ parallelogrammi circumscripti: erit residuum, $\frac{2}{3}$ A B $-\frac{2}{3}$ $a\beta$. Et pariter in aliis.

Fig. Preced.

PROP. LXVII. *Corollarium.*

SI Triangulum rectis quotlibet secetur basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè altas abscindentibus;) abscissa Triangula (verticem inter & rectas secantes) sunt ut 1, 4, 9, 16, *&c. numeri quadrati. Spacia vero rectis illis interjecta, ut* 1, 3, 5, 7, *&c. Arithmetice-proportionales.*



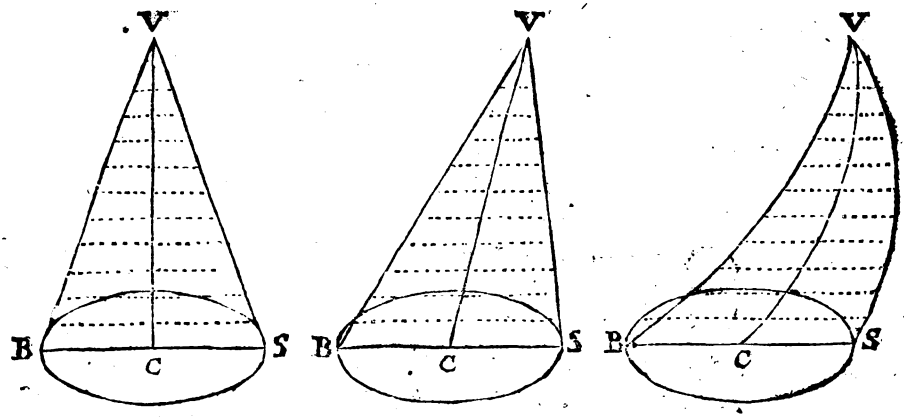
Quia Triangulorum abscissorum tam altitudines quam bases sunt arithmetice proportionales: ergo plana in duplicata ratione Arithmetice proportionalium, sive ut numeri quadrati, 1, 4, 9, 16, &c. Et propterea, spacia interjecta, $1, 3 = 4 - 1$, $5 = 9 - 4, 7 = 16 - 9$ &c.

PROP. LXVIII. *Corollarium.*

SI conus planis quotlibet secetur basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, (portiones æquè altas abscin-

Digitized by Google

abſcindentibus,) abſciſſi coni (verticem inter & plana ſecantia) ſunt ut 1, 8, 27, 64, &c. *numeri cubici. Portiones vero interjectæ, ut* 1, 7, 19, 37, &c. *differentiæ numerorum cubicorum. (& ſimiliter in Pyramide.)*

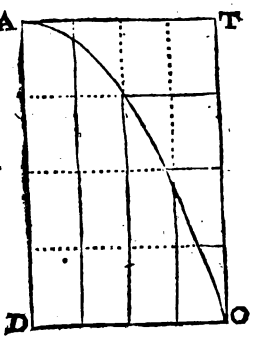


Quia cum conorum abſciſſorum altitudines ſint arithmeticè proportionales & propterea etiam baſium diametri; adeoq; baſes in earundem ratione duplicata; erit ratio conorum (quæ ex altitudinum & baſium rationibus componitur) in ratione altitudinum triplicata, ſeu ut 1, 8, 27, 64, &c. Et propterea portiones interjectæ, ut 1, 7 = 8 − 1, 19 = 27 − 8, 37 = 64 − 27. &c.

PROP. LXIX. *Corollarium.*

SI Parabola rectis quotlibet ſecetur (baſi parallelis & æqualiter ab invicem remotis, portiones æquèaltas abſcindentibus,) erunt abſciſſæ parabolæ (verticem inter & rectas ſecantes,) ut 1 √ 1, 2 √ 2, 3 √ 3, 4 √ 4, &c. *vel ut* √1, √8, √27, √64, &c. *radices qua-*

Digitized by Google

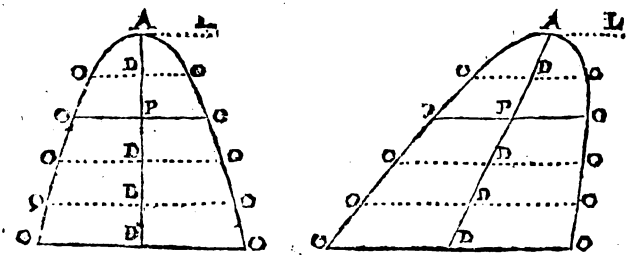


quadratica numerorum cubicorum. Spacia vero interjecta, ut earum radicum differentiæ.

Sunt enim baſes (quippe Ordinatim-applicatæ in parabolâ) in altitudinum ratione ſubduplicata.

PROP. LXX. *Corollarium.*

SI Conoides Parabolicum planis quotlibet ſecetur (baſi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abſcindentibus æquè-altas,) erunt conoidea ſic abſciſſa (verticem inter & plana ſecantia) ut 1, 4, 9, 16, *&c. numeri quadrati: Et portiones interjecta, ut* 1, 3, 5, 7, *&c. Arithmetice-proportionales. (Et ſimiliter in Pyramidoide.)*



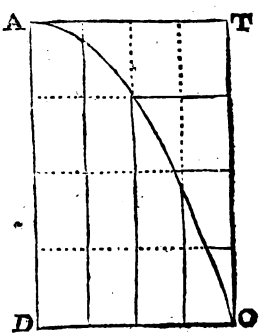
Nempe, ut de Triangulo dictum eſt Prop. 67. ſunt enim conoidum abeciſſorum baſes in ratione duplicata ſemidiametrorum hoc eſt ordinatim-applicatarum in parabola; & propterea, altitudinibus proportionales.

PROP.

Digitized by Google

PROP. LXXI. *Corollarium.*

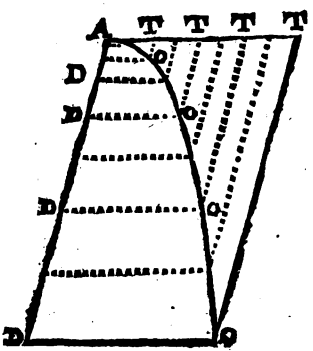
SI complementum semiparabolæ rectis quotlibet secetur (complementi basi parallelis, & æqualiter ab invicem remotis, portiones abscindentibus æquè-altas,) erunt complementa sic abscissa (verticem inter & rectas secantes,) ut 1, 8, 27, 64, &c. numeri cubici: Et portiones interjectæ, ut 1, 7, 19, 37, &c. numerorum cubicorum differentiæ.



Nempe ut supra de Cono dictum est, Prop. 68. sunt enim bases, hoc est, complementorum ordinatim applicatæ, in altitudinum ratione duplicatâ.

PROP. LXXII. *Corollarium.*

SI Conoides etiam *semiparabolæ complemento aptatum, planis quotlibet secetur (basi parallelis, & ab invicem æqualiter remotis, portiones abscindentibus æquè-altas,) erunt abscissa conoidea (verticem inter & plana secantia) ut 1, 32, 243, 1024, &c. numeri surdesolidi: Et portiones interjectæ, ut 1, 31, 211, 781, &c. numerorum surdesolidorum differentiæ. (Et similiter in Pyramidoide.)*



Digitized by Google

Sunt enim baſes conoidum abſciſſorum, in duplicata ratione ſemidiametrorū ſuarum, ideoque in quadruplicata ratione altitudinum, (ſunt enim ipſæ ſemidiametri baſiū, ſeu ordinatim-applicatæ in ſemiparabolæ complemento, in duplicata ratione altitudinum.) Et propterea figuræ ſolidæ abſciſſæ, in altitudinum ratione quintuplicata; quippe quæ componitur ex rationibus baſium & altitudinum.

SCHOLIUM.

Et ſimiliter de aliis ejuſmodi figuris (ſive planis ſive ſolidis) eo modis ſectis, judicandum erit: reſpectu ſemper habito ad gradum ſeu poteſtatem illius ſeriei quo pertinent.

PROP. LXXIII. *Theorema.*

SI duæ quælibet ſeries (aut etiam plures) invicem reſpective multiplicentur (nempe primus terminus unius in primum alterius, ſecundus in ſecundum, &c.) prodibit ejuſmodi alia ſeries; quæ indicem habebit ex multiplicatarum indicibus aggregatum; rationem autem, ad ſeriem terminorum ipſius maximo æqualium, eam quam Tabellæ præcedentes (vel etiam Propoſitio 64) indicabunt.

Exſempli gratia. Si ſeries quadratorum vel ſecundanorum (cujus index 2) reſpective mutiplicetur in ſeriem cuborum vel Tertianorum (cujus index 3,) prodibit ſeries quintanorum (cujus index $5 = 2 + 3$:) quæ propterea rationem habebit, ad ſeriem maximo Æqualium, eam quam habet 2 ad $6 = 5 + 1$. Puta ſi reſpective multiplicetur

Series ſecundanorum $0a$, $1a$, $4a$, $9a$, $16a$, &c.
in ſeriem Tertianorum $0b$, $1b$, $8b$, $27b$, $64b$, &c.
prodibit ſeries quint. $0ab$, $1ab$, $32ab$, $243ab$, $1024ab$, &c.

Item, ſi ſeries ſecundanorum (cujus index 2) reſpective multiplicetur in ſeriem ſubtertianorum (cujus index $\frac{1}{3}$) erit producta ſeries, Radices cubicæ ſeptimanorum (cujus index

Digitized by Google

est $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$;) quæ est ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1 ad $\frac{10}{3} = \frac{7}{3} + 1$, vel ut 3 ad 10. Puta si respective multiplicetur

Series $0a,\ 1a,\ 4a,\ 9a,$ &c.
in seriem $\sqrt[3]{0}b,\ \sqrt[3]{1}b,\ \sqrt[3]{2}b,\ \sqrt[3]{3}b,$ &c.

hoc est series $\sqrt[3]{0}a^3,\ \sqrt[3]{1}a^3,\ \sqrt[3]{64}a^3,\ \sqrt[3]{729}a^3,$ &c.
in seriem $\sqrt[3]{0}b,\ \sqrt[3]{1}b,\ \sqrt[3]{2}b,\ \sqrt[3]{3}b,$ &c.
prodibit series

$\sqrt[3]{0}a^3b,\ \sqrt[3]{1}a^3b,\ \sqrt[3]{128}a^3b,\ \sqrt[3]{2187}a^3b,$ &c.

Item, si series subsecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) respective multiplicetur in seriem subquintanorum (cujus index $\frac{2}{5}$,) erit producta series Radices-Decimanæ septimanorum, (cujus index $\frac{7}{10} = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}$) & propterea rationem habebit, ad seriem maximæ æqualium, eam quam habet 1 ad $\frac{17}{10} = \frac{7}{10} + 1$, vel 10 ad 17. Puta si respective multiplicetur.

Series $\sqrt[2]{0}a,\ \sqrt[2]{1}a,\ \sqrt[2]{2}a,\ \sqrt[2]{3}a,$ &c.
in seriem $\sqrt[5]{0}b,\ \sqrt[5]{1}b,\ \sqrt[5]{2}b,\ \sqrt[5]{3}b,$ &c.
hoc est, series

$\sqrt[10]{0}a^5,\ \sqrt[10]{1}a^5,\ \sqrt[10]{32}a^5,\ \sqrt[10]{243}a^5,$ &c.
in seriem $\sqrt[10]{0}b^2,\ \sqrt[10]{1}b^2,\ \sqrt[10]{4}b^2,\ \sqrt[10]{9}b^2,$ &c.
prodibit series

$\sqrt[10]{0}a^5b^2,\ \sqrt[10]{1}a^5b^2,\ \sqrt[10]{128}a^5b^2,\ \sqrt[10]{2187}a^5b^2,$ &c.

Et similiter in aliis ejusmodi multiplicationibus continget.

PROP. LXXIV. *Corollarium.*

IDeoq; *Ubi Aggregatum Indicum serierum invicem respective multiplicatarum idem est, ibi et idem erit Index seriei productæ.*

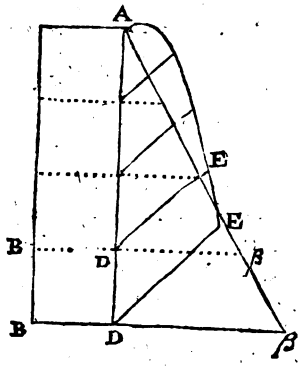
Exempli gratia. Si series tertianorum in seriem Tertianorum, vel series secundanorum in seriem Quartanorum, vel series Primanorum in seriem Quintanorum, vel series Æqualium in seriem sextanorum, respective multiplicetur; Prodibit series sextanorum. Quia nempe in singulis

Digitized by Google

aggregatum indicum est 6, (nam 3 + 3 = 2 + 4 = 1 + 5 = 0 + 6 = 6.) Et similiter in aliis.

PROP. LXXV. *Corollarium.*

SI ADB Parallelogrammi rectæ omnes DB, in Dβ rectas Trianguli ADβ, (æque-alti) respective-ducantur; rectangula producta erunt series primanorum (qualia sunt plana cunei Parabolici, prop. 11. Con. Sect.) pro quibus, si substituantur totidem Quadrata (vel quævis aliæ figuræ planæ similes) illis æqualia, constituetur Pyramidoides Parabolicum: Et eorum Quadratorum (vel figurarum similium) latera, vel mediæ proportionales inter rectas sic multiplicatas, DE, constituent Parabolam, vel Semiparabolam.



(Intellige, si plana illa, vel mediæ proportionales, quæ sic emergunt, supponantur ad rectam aliquam ita ordinatim-posita ut figurarum constituendarum natura postulat. Quod & deinceps aliquoties intelligendum erit.)

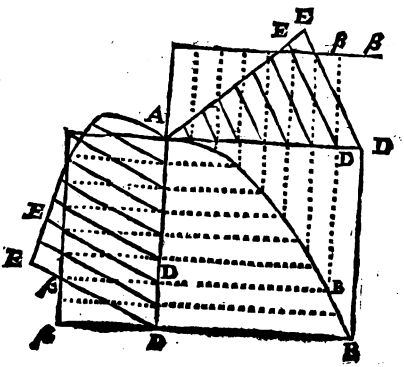
Nam, cum rectæ Parallelogrammi, sint series Æqualium (cujus index 0;) & rectæ Trianguli, series primanorum, (cujus index 1;) producetur, multiplicando, series item primanorum (quia 0 + 1 = 1,) qualia sunt plana cunei Parabolici, & Pyramidoidis Parabolici, (per Prop. 9, 11. Con. Sect.) & mediæ proportionales (seu latera similium planorum) erunt series subsecundanorum (quippe ut Radices quadraticæ Primanorum) quales sunt parabolarum rectæ per Prop. 8. Con. Sect.

PROP.

Digitized by Google

PROP. LXXVI. *Coroll.*

SI ADβ Parallelogrammi rectæ βD in rectas DB semiparabolæ æquè-altæ ADB respectivè ducantur, rectangula producta erunt series subsecundanorum; & mediæ proportionales, series subquartanorum (quales sunt rectæ Paraboloidis Biquadratici DE.)



Hoc est, series Æqualium (cujus index o) in seriem subsecundanorum (cujus index $\frac{1}{2}$) respective ducta efficiet seriem item subsecundanorum (quia $\frac{1}{2} + o = \frac{1}{2}$) & mediæ proportionales (quippe subsecundanorum radices quadraticæ) erunt series subquartanorum.

PROP. LXXVII. *Coroll.*

SI ADβ Parallelogrammi rectæ Dβ in rectas DB Complementi Semiparabolæ respectivè ducantur; rectangula producta erunt series secundanorum: mediæ autem proportionales, series primanorum (Triangulum constituentium, ADE.)

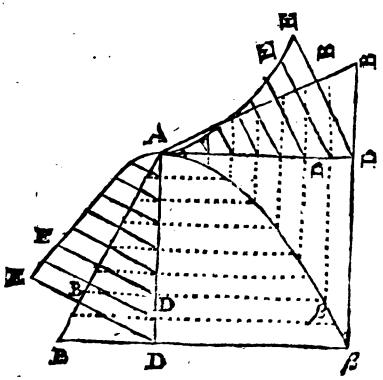
Nempe, series Æqualium in seriem secundanorum sic ducta, dat seriem etiam secundanorum (quia $o + 2 = 2$) eorumque radices quadraticæ sunt series primanorum.

PROP.

Digitized by Google

PROP. LXXVIII. *Corollarium.*

SI Trianguli rectæ DB respectivè ducantur in rectas semiparabolæ Dβ, rectangula producta erunt series radicum quadraticarum Tertianorum, & medie proportionales, radices Biquadraticæ Tertianorum, DE.



Nempe, series primanorum in seriem subsecundanorum sic ducta, dabit seriem radicum quadraticarum Tertianorum (quia $1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$) quarum radices quadraticæ, sunt radices biquadraticæ Tertianorum.

PROP. LXXIX. *Corollarium.*

SI Trianguli rectæ DB respective ducantur in rectas Complementi semiparabolæ Dβ; producta rectangula sunt series Tertianorum (quia 1 + 2 = 3.) Et medie proportionales, radices quadraticæ Tertianorum. DE.

Demonstratur ut præcedentes.

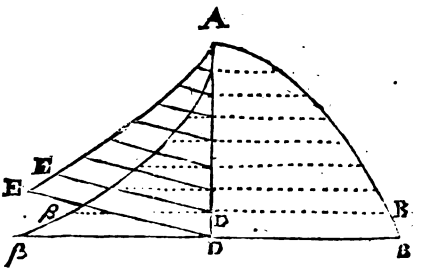
PROP. LXXX. *Corollarium.*

SI rectæ complementi semiparabolæ in rectas semiparabolæ respective ducantur; rectangula producta erunt series radicum quadraticarum Quintanorum (quia

2 +

Digitized by Google

$2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 3) *& mediæ proportionales, ſeries radicum*



biquadraticarum Quintanorum. Ut patet.

SCHOLIUM.

Et pari modo de figuris ſive planis ſive ſolidis, quæ ex ejuſmodi multiplicatione provenient, judicandum erit. Ut ſi trianguli unius rectæ in rectas Trianguli alterius (ſive ſimilis ſive diſſimilis, modo æque alti) reſpective ducantur, fiet Pyramis; mediæ vero proportionales conſtituent etiam Triangulum. Semiparabolæ unius rectæ in rectas alterius reſpective ductæ, efficient Pyramidoides Parabolicum; mediæ autem proportionales ſemi parabolam. Et ſic de cæteris.

PROP. LXXXI. *Theorema.*

SI unius Seriei termini omnes per terminos alterius Seriei reſpectivè dividantur, quotientes erunt ſeries alia, cujus index reperitur ſubducendo indicem ſeriei Dividentis ex indice ſeriei diviſæ, quod reſtat enim eſt index ſeriei diviſione provenientis, ſive Quotientis: Ratio autem quam habitura eſt ſeries ſic producta, ad ſeriem totidem terminorum ipſius maximo æqualium, ea erit quam Tabellæ præcedentes (vel propoſitio 64) indicant.

Exempli gratia. Si ſeries Biquadratorum vel quartanorum

norum (cujus index 4) dividatur per seriem cuborum vel Tertianorum (cujus index 3) Quotientes erunt series lateralium seu Primanorum, cujus index 1 = 4 − 3.

Tert.	Quart.	Prim.
0 c)	0 q q	(0 l
1 c)	1 q q	(1 l
8 c)	16 q q	(2 l
27 c)	81 q q	(3 l
&c.	&c.	&c.

Si series tertianorũ dividatur per seriem Primanorum proveniet series secundanorum, cujus index 2 = 3. − 1. Et si series secundanorum per seriem secundanorum dividatur, proveniet series æqualium, cujus index 0 = 2 − 2. Et sic de cæteris.

Prim.)	Tert.	(Secund
0 l)	0 c	(0 q
1 l)	1 c	(1 q
2 l)	8 c	(4 q
3 l)	27 c	(9 q
	&c.	

Demonstratio patet ex Prop. 73. Quia nempe series Tertianorum in seriem primanorum respective ducta efficiet seriem Quartanorum. Et series primanorum in seriem secundanorum sic ducta efficiet seriem tertianorum. Et series secundanorum in seriem Æqualium sic ducta, producet seriem secundanorum. Et sic in reliquis omnibus. quod enim multiplicatione conficitur, id Diuisione resolvitur.

Sec.	Sec.	Æqual.
0 q)	0 q	(1
1 q)	1 q	(1
4 q)	4 q	(1
9 q)	9 q	(1
	&c.	

PROP. LXXXII. *Corollarium.*

IDeoq; , *ubi idem est graduum sive indicum excessus seriei Dividendæ supra seriem Dividentis , idem erit seriei Quotientum index.*

Exsempli gratia. Si series sextanorum per seriem quartanorum, vel series quintanorum per seriem Tertianorum, vel series quartanorum per seriem Secundanorum, vel series Tertianorum, per seriem Primanorum dividatur; proveniet series Secundanorum. quia nempe in singulis series Divisa seriem Dividentem duobus gradibus superat; est enim 6 − 4 = 5 − 3 = 4 − 2 = 3 − 1 = 2 − 0 = 2) Ideoque per præced.) idem seriei provenientis Index. Et pariter in aliis.

PROP.

Digitized by Google

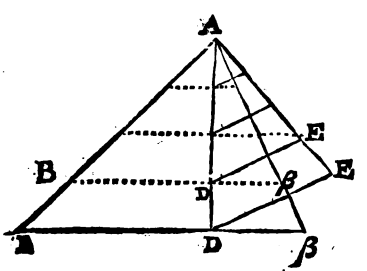
PROP. LXXXIII. *Coroll.*

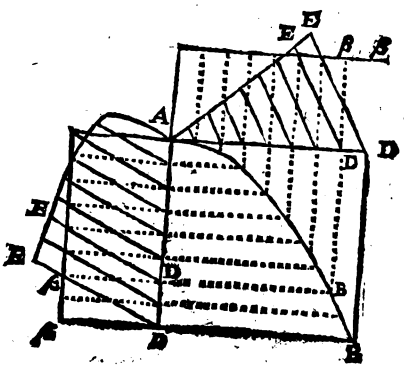
Si Pyramis (series nempe Secundanorum) ad Triangulum (æquè-altum) respectivè applicetur (nempe plana illius ad Rectas hujus) prodibit Triangulum; (quia nempe 2 — 1 = 1.) Si vero applicetur ad complementum semi-parabolæ, prodibit Parallelogrammum; (quia 2 — 2 = 0.) Si ad semiparabolam, planum prodiens erit series Radicum quadraticarum Tertianorum; (quia 2 — $\frac{1}{2}$ = 1 $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{2}$.) Si ad seriem Æqualium, prodibit complementum semiparabolæ; (quia 2 — 0 = 2.) Et sic in aliis.

Patet ex Prop. 81.

PROP. LXXXIV. *Coroll.*

VEL, si respectivis rectis Trianguli primi ADB & secundi ADE, sumantur tertiæ proportionales; prodibit Triangulum tertium ADβ: Si respectivis rectis complementi semiparabolæ ADB, & Trianguli





ADE, prodibit parallelogrammum ADβ: Si vero Pa-

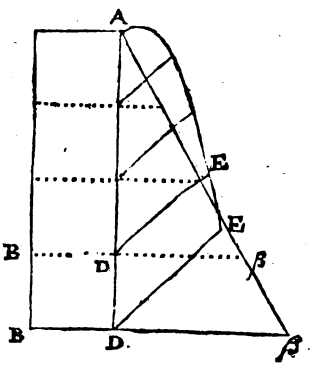
Digitized by Google

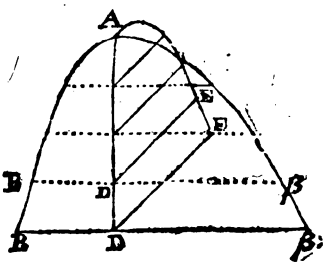
rallelogrammi ADβ & Trianguli ADE, prodibit complementum ſemiparabolæ ADE.

Sequitur ex præcedente. Quadrata enim rectarum in Triangulo conſtituunt Pyramidem. Et ſimiliter in reliquis. Oſtenditur autem pars prima in figura priori; ſecunda & tertia in poſteriori.

PROP. LXXXV. *Corollarium.*

SI Pyramidoides Parabolicum (ſeries nempe Primanorum) ad Triangulum (æquè-altum) reſpectivè applicetur: prodibit Parallelogrammum; (*quia* $1 - 1 = 0$.) *Si ad parallelogrammum, prodibit Trian-*





gulum; (*quia* $1 - 0 = 1$.) *Si ad ſemiparabolam, prodibit ſemiparabola;* (*quia* $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.) *Si ad ſemi-paraboloides cubicale, planum prodiens conſtabit ex ſecundanorum radicibus cubicis;* (*quia* $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.) *Et pariter in aliis ejuſmodi applicationibus.*

Patet ex Prop. 81.

PROP.

Digitized by Google

PROP. LXXXVI. *Corollarium.*

SImiliter. *Si respectivis rectis Trianguli ADβ, & semiparabolæ ADE, sumantur tertiæ proportionales, prodibit Parallelogrammum ADE: si respectivis rectis Parallelogrammi ADB, & semiparabolæ ADE, prodibit Triangulum ADβ: si respectivis rectis semiparabolæ primæ ADE, & secundæ ADE, prodibit semiparabola tertia ADβ: & sic in aliis.*

Sequitur ex præcedente. quadrata enim rectarum in semiparabola, constituent Pyramidoides Parabolicum. Ostenditur, in fig. præced.

SCHOLIUM.

Et pari modo de aliis figurarum solidarum ad Planas applicationibus respectivis judicium fiet. Sufficit paucas exempli causa indicasse, ad quarum imitationem fieri possunt innumeræ aliæ.

PROP. LXXXVII. *Theorema.*

SI proponatur series quælibet prædictarum per aliam superioris gradus seu potestatis dividenda, nulla jam memoratarum series prodire poterit, (cum index potestatis superioris ex indice potestatis inferioris, major quippe ex minore, auferri non possit:) sed aliusmodi plane series, cujus nempe termini sunt reciprocè proportionales homologis terminis alterius seriei, quæ indicem habet æqualem excessui indicis seriei dividentis supra indicem seriei divisæ.

Series autem sic provenientes, series *Reciprocæ* appellentur, habeantq; Indices negativos.

Exempli gratia. Si series Secundanorum dividenda sit per seriem Tertianorum, vel series Primanorum, per seriem secundanorum, vel series Æqualium per seriem Primanorum, (ubi seri-

Digitized by Google

es dividens est uno gradu superior serie dividenda, adeoque index seriei dividentis unitate major quam index seriei divisæ, puta $3-2=2-1=1-0=1$:) termini seriei oriundæ erunt reciproce proportionales homologis terminis seriei primanorum. Puta si respective dividatur

series	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
per seriem	$0a^1$,	$1a^1$,	$8a^1$,	$27a^1$,	$64a^1$,	&c.
vel series	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.
per seriem	$0a^2$,	$1a^2$,	$4a^2$,	$9a^2$,	$16a^2$,	&c.
vel series	1,	1,	1,	1,	1,	&c.
per seriem	$0a$,	$1a$,	$2a$,	$3a$,	$4a$,	&c.
prodibit series	$\frac{1}{0a}$,	$\frac{1}{1a}$,	$\frac{1}{2a}$,	$\frac{1}{3a}$,	$\frac{1}{4a}$,	&c.

cujus seriei termini sunt reciproce proportionales homologis terminis seriei primanorum $\frac{0a}{1}$, $\frac{1a}{1}$, $\frac{2a}{1}$, $\frac{3a}{1}$, $\frac{4a}{1}$, &c. ut patet. Nempe $\frac{1}{2a}.\ \frac{1}{3a}.\ ::\ \frac{3a}{1}.\ \frac{2a}{1}.$ Et sic ubique.

Eodem modo si series primanorum dividenda sit per seriem tertianorum; vel (quod tantundem valet) series Æqualium per seriem Secundanorum; erit series proveniens seriei secundanorum reciproce proportionalis. puta

$$\frac{1}{0a},\ \frac{1}{1a},\ \frac{1}{4a},\ \frac{1}{9a},\ \frac{1}{16a},\ \&c.$$

Et pari modo in omnibus ejusmodi divisionibus continget.

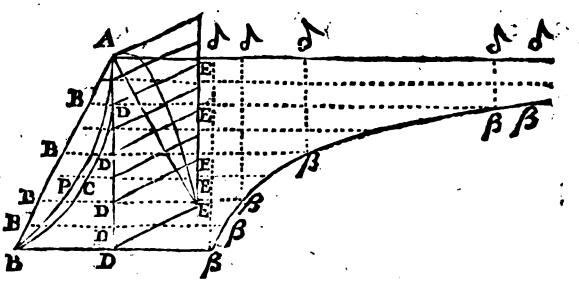
PROP. LXXXVIII. *Coroll.*

Si infinita plana (parallela) Parallelepipedi, ad totidem rectas Trianguli (æquè-alti) applicentur; (vel si respectivis rectis Trianguli, & Parallelogrammi, sumantur tertiæ proportionales;) series rectarum provenientium erit reciproca serici Primanorum, quæ quidem

rectæ

rectæ sunt suis a vertice distantiis (vel, si placet, diametris interceptis,) reciproce-proportionales.

Esto enim Parallelepipedum, cujus infinita plana æquentur quadratis totidem rectarum Parallelogrammi A D E, quæ si applicentur ad rectas Trianguli A D B, prodibunt rectæ (re-



ctis trianguli & Parallelogrammi tertiæ proportionales) figuram A D β mixtam constituentes, quæ reciproce proportionales erunt tam homologis rectis Trianguli (quia nempe cum illis constituunt rectangula æqualia) quam Diametris interceptis, seu distantiis a vertice, quæ (propter similia Triangula abscissa) sunt illis trianguli rectis proportionales.

PROP. LXXXIX. *Coroll.*

Idem continget, si Plana Pyramidis (quadratis rectarum Trianguli A D E æqualia) applicentur ad totidem Rectas Complementi Semiparaboloidis Cubicalis ADEC.

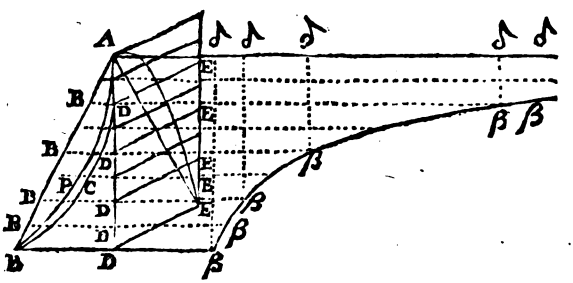
Patet ex Prop. 87. Nam (ut in Prop. præced.) series primanorum ex quibus conflatur Triangulum, est uno gradu superior, quam series Æqualium, ex quibus constat Parallelepipedum: Sic (in hac Prop) series Tertianorum in complemento semiparaboloidis cubicalis est in uno gradu superior quam series secundanorum ex quibus constat Pyramis. Utrobique igitur provenit series seriei Primanorum reciproca.

PROP.

Digitized by Google

PROP. XC. *Corollarium.*

Idem continget, ſi Plana Pyramidoidis Parabolici (hoc eſt, ſeries Primanorum,) æqualia quadratis rectarum ſemiparabolæ ADE reſpective applicentur ad rectas complementi ſemiparabolæ ADBP. (Seriem nempe Secundanorum.)



Nam & hic index ſeriei dividentis unitate ſuperat indicem ſeriei dividendæ.

PROP. XCI. *Corollarium.*

Figura plana ex ſeriè rectarum Primanis reciproce proportionalium conflanda, eſt interminabilis. Quod & ſimiliter verum eſt de omnibus ſeriebus Reciprocis.

Cum enim primus terminus in ſerie Primanorum ſit 0, primus terminus in ſerie reciproca erit ∞ vel infinitus: (ſicut, in diviſione, ſi diviſo ſit 0, quotiens erit infinitus.) adeoq; recta A ♪, & curva ββ, non niſi poſt infinitam diſtantiam (hoc eſt, nunquam,) concurrent.

Pari ratione neque concurrent (niſi poſt infinitam diſtantiam) eadem curva ββ & recta AD (quantumvis utraq; continuetur) non prius enim evaneſcet diſtantia Dβ quam facta fuerit infinita recta DB & propterea ·····

PROP.

Digitized by Google

PROP. XCII. *Corollarium.*

Curva ββ duas habet Asymptotas rectas Aδ, AD. Quod & de aliis ejusmodi Curvis rectarum, series reciprocas terminantibus, verum est.

Nempe ita perpetuo propius accedunt ad curvam rectæ, ut tandem earum distantia sit quavis assignabili minor, (ut ex dictis facile est probatu,) neque tamen unquam concurrent, ut jam ostensum est. Atque idem de aliis ejusmodi curvis pariter ostendi poterit.

PROP. XCIII. *Corollarium.*

Rectæ (Dβ, Dβ, &c.) Primanis reciprocè proportionales ab infinitâ (Aδ = ∞) continue decrescunt, (eadem ratione qua respective rectæ DB, DB, in serie primanorum a puncto A = 0 continue crescunt,) donec pervenitur ad minimam, (sicut in serie primanorum pervenitur ad maximam.) Quod verum est & in aliis seriebus reciprocis.

Patet, propter proportionem reciprocam.

PROP. XCIV. *Corollarium.*

In Figura ADββ, (ex primanorum reciprocis) Parallelogramma inscripta ADβ, ADβ, &c. sunt invicem æqualia.

Habent enim bases & altitudines reciprocas per Prop. 88.

PROP. XCV. *Corollarium.*

Et propterea, Ipsa curva ββ est Hyperbola; cujus centrum A, Asymptotæ AD, Aδ.

Per Prop. 12. lib. 2. Apollonii.

PROP.

Digitized by Google

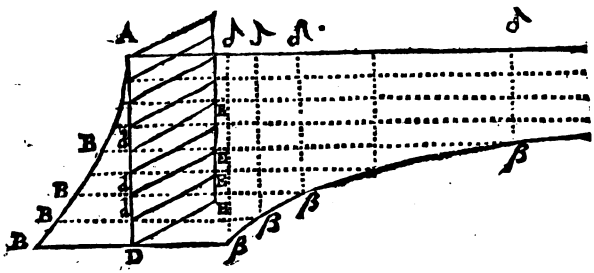
PROP. XCVI. *Corollarium.*

Si chorda musica AD varie dividatur in punctis D D, &c. sonos edet proportionales rectis D β, D β, &c.

In Fig. præced. Nam (per principia musica) eadem chorda (æquabilis & æqualiter tensa) sonos edit longitudinibus reciproce proportionales. Ideoque si chordæ sint ut A D, A D, &c. soni erunt ut D β, D β, &c. per Prop. 88.

PROP. XCVII. *Coroll.*

Si plana Parallelepipedi (quippe series æqualium) æqualia quadratis rectarum Parallelogrammi ADE ad respectivas rectas Complementi Semiparabolæ ADB (seriem scil. secundanorum) applicentur; prodibit series rectarum secundanis reciprocè proportionalium: Ex quibus si supponatur conflari figura plana ADβ, erit ea interminabilis; & curva illas terminans duas habebit Asymptotas rectas A D, A δ.



Probatur eodem modo quo propositiones aliquot præcedentes de serie reciproca seriei Primanorum.

PROP. XCVIII. *Coroll.*

Idem continget, si plana pyramidis sic applicentur ad rectas complementi semi-paraboloidis Biquadraticalis; vel

Digitized by Google

vel plana pyramidoidis parabolici ad rectas complementi paraboloidis cubicalis.

Nam & istic index seriei dividentis binario superat indicem seriei dividendæ.

PROP. XCIX. *Corollarium.*

IN ejusmodi serie secundanis reciprocâ, rectæ D β, d β, &c. sunt in reciprocæ rationis Diametrorum (vel distantiarum a vertice) ratione duplicata, (sive ut dAq DAq, &c.)

Quia nempe reciproce-proportionales sunt rectis D B, d B, &c. quæ sunt in diametrorum A D, A d &c. rationis directæ ratione duplicata. Puta

dAq. DAq :: dB. DB :: Dβ. dβ. Ergo $\frac{dAq}{DAq} = \frac{D\beta}{d\beta}$.

PROP. C. *Corollarium.*

IN Figura plana (ADββ) ex serie rectarum secundanis reciprocarum conflata, inscripta parallelogramma (ADβ, Adβ,) sunt interceptis diametris (DA, dA,) reciproce proportionalia.

Sunt enim (per 23. e 6) ut DA * Dβ ad dA * dβ. Est autē per præced.) $d\beta = \frac{DAq}{dAq} D\beta$: Et $dA * d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$.

Ergo & $DA * D\beta . dA * d\beta = \frac{DAq}{dA} D\beta$:: dA * DA * Dβ.

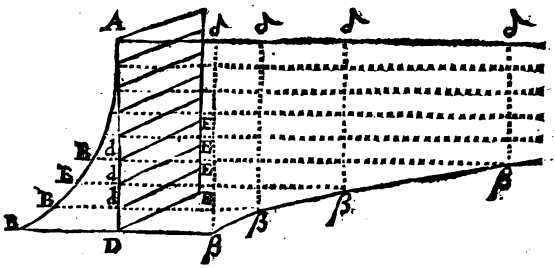
DAq * Dβ :: dA. DA.

PROP. CI. *Corollarium.*

SI verò figura plana (ADββ) fit ex serie rectarum Tertianis reciprocarum conflata; (quæ nempe sint rectis complementi paraboloidis cubicalis ADB, & Parallelo-

Digitized by Google

grammi ADE, tertiæ proportionales;) erunt rectæ illæ (Dβ, dβ, &c.) in reciprocæ rationis Diametrorum (DA, dA, &c.) ratione triplicata (scil. ut dAc, DAc, &c.) Et Parallelogramma inscripta ADβ, Adβ, &c.) in reciprocæ rationis diametrorum ratione duplicatâ. (sive ut dAq, DAq, &c.)



Est enim (ex constructione) $D\beta . d\beta :: dB . DB :: dAc . DAc$. Et propterea etiam $d\beta = \frac{DAc}{dAc} D\beta$. Ergo Parallelogramma $ADβ . Ad\beta :: DA \times D\beta . dA \times d\beta = \frac{dA \times DAc}{dAc} D\beta = \frac{DAc}{dAq} D\beta :: dAq \times DA \times D\beta . DAc \times D\beta :: dAq . DAq$. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo de aliis ejusmodi figuris planis ex qualibet rectarum *serie reciproca* conflatis judicandum erit; ut & de Parallelogrammis (sive rectangulis sive obliquangulis, prout situs figuræ postulat,) ipsis inscriptis.

Quod ad Aream autem attinet istarum figurarum ex seriebus reciprocis constantium; quærenda est illa eodem fere modo quo supra in seriebus directis. Ubi autem series directæ indices habent 1, 2, 3, &c. ut quæ supra seriem Æqualium tot gradibus ascendunt; habebunt hæ quidem (illis reciprocæ) suos indices contrarios negativos $-1, -2, -3$, &c. tanquam tot gradibus infra seriem Æqualium descendentes. Prout autem illæ ab o ciphra vel Nihilo continuo crescunt, hæ contra ab ∞ Infinito continue decrescunt; atque ut illic terminus maxi-

mus

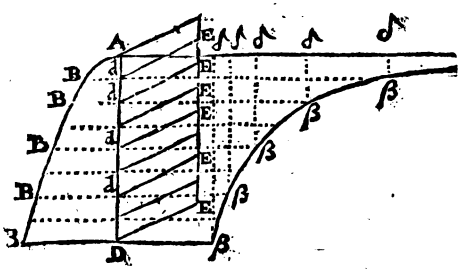
mus, hic minimus, seriem claudit: (quæ tamen & pro arbitrio continuanda supponitur, quousque libet illa crescendo, hic decrescendo.) Adeoque, ut illic figura Circumscripta (parallelogrammum puta vel prisma) sive series totidem terminorum Maximo æqualium; hic, figura Inscripta, sive series totidem terminorum Minimo æqualium, habenda est pro communi mensura ad quam facienda est comparatio; utrobique ad illum terminum respectu habito qui seriem claudit.

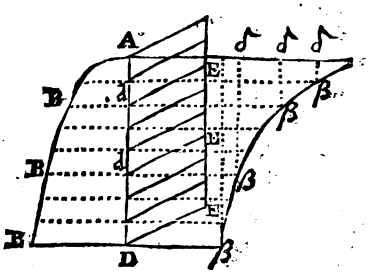
Neque interim mirum cuiquam videatur (ut ut fortassis inexspectatum) si figuræ interminatæ rationem ad datam aliam terminatam inquiram. Quamvis enim hujusmodi figuræ A D β (ut ut ex parte D β ad libitum terminatæ, uti modo in his scholiis dictum est) supponantur ex parte ♂ β in infinitum continuatæ (per Prop. 91.) non tamen propterea vel nullam vel semper infinitam rationem habituræ sunt ad datam figuram terminatam, puta ad parallelogrammum æque altum super eadem basi D β descriptum. Quod eo quidem facilius assensum obtinere posse videatur, cum id ipsum in una quadam figura solida (quam *Hyperbolicam acutam infinitam* vocat) jam ostenderit Torricellius. Sed neque semper rationem habituræ sunt finitam, sed aliquando vel infinitam, vel etiam (si id fine solœcismo dici possit) majorem quam infinitam. Nempe, si eadem ratione abbreviantur rectæ ♂ β, qua prolongantur rectæ D β, erit ea ratio infinita; ubi nempe prolongatio unius æquipollet abbreviationi alterius, (& propterea figuræ infinitæ continuatæ ratio ex utraque composita æquipollet figuræ alicui æquabiliter in infinitum continuandæ:) Si vero minori ratione abbreviantur rectæ ♂ β quam prolongentur D β, futura est ratio plusquam infinita; tunc enim prolongatio harum præpollet (seu plusquam æquipollet) illarum abbreviationi: Si autem majori ratione decrescunt rectæ ♂ β quam crescunt rectæ D β, præpollet earum decrementum incremento harum; adeoq; futura est ratio finita, minor siquidem quam infinita. (Et quidem secundum hoc κεφάλαιον, non modo de figuris hisce quas jam tractamus, sed de aliis etiam quibusvis interminabilibus, sive planis sive solidis, ad terminatas aliquas comparatis, judicandum erit: quæ, credo, speculatio non videbitur injucunda.) Quæ autem futura est in singulis ratio, sequentibus aliquot propositionibus (regulam Prop. 64 secuti) indicabimus.

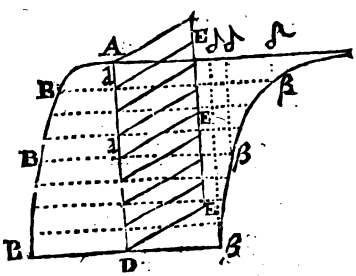
Digitized by Google

PROP. CII. *Theorema.*

SI figura ADβ verticem habeat Aλ infinitum, & perpetuò decreſcat ad baſin uſq; Dβ, ſecundum ſeriem aliquam reciprocam ſeriei cuilibet directæ (earum puta quæ prop. 59. memorantur,) quæ indicem habeat minorem quam 1; habebit illa ad parallelogrammum ſuper eâdem baſi æque-altum rationem finitam; eam nempe quam habet 1 ad iſtius ſeriei reciprocæ indicem unitate auctum.







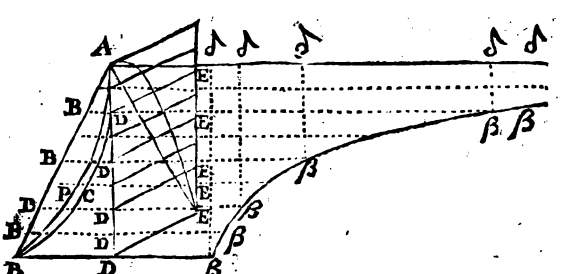
Exſempli gratia; ſunto ſeries directæ ſubſecundanorum, ſubtertianorum, ſubquartanorum, &c. quarum, indices $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. (unitate minores;) ſeries his reciprocæ indices habebunt $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (Nam ſi ſupponatur ſeries æqualium, cujus index o, per illas dividi, ſeries diviſione

divisione provenientes habebunt indices $0 - \frac{1}{2}$, $0 - \frac{1}{3}$, $0 - \frac{1}{4}$, &c. hoc est $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{4}$, &c. (per Prop. 81.) quibus si (juxta regulam Prop. 64.) addatur 1, fient $-\frac{1}{2} + 1$, $-\frac{1}{3} + 1$, $-\frac{1}{4} + 1$, &c. hoc est, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. & propterea ratio totius figuræ ad parallelogrammum inscriptum (super eadem basi æquealtum) ut 1 ad $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. vel ut 2 ad 1, 3 ad 2, 4 ad 3, &c.

Et pari modo, si sumatur series reciproca seriei radicum cubicarum secundanorum, vel radicum biquadraticarum secundanorum, aut tertianorum, vel radicum surdesolidarum secundanorum, tertianorum, aut quartanorum, (quarum indices sunt $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$,) aut alii cuivis seriei, cujus index est unitate minor. Quia reciprocarum serierum indices negativi his contrarii (puta $-\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{4}$, &c.) additione unitatis fient affirmativi, adeoque ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, erit ratio finita; quippe numeri positivi ad positivum.

PROP. CIII. *Theorema.*

SI vero ejusmodi Figura ADBβ sic continuo decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitati æqualem (nempe seriei Primanorum;) habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem infinitam: eam nempe quæ est 1 ad 0.

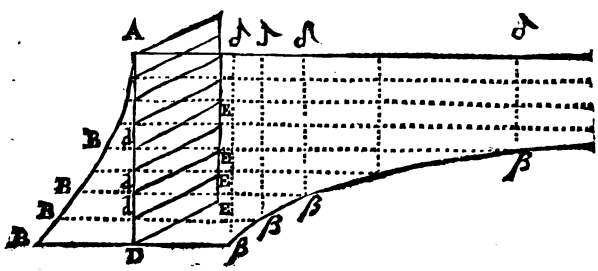


Cum enim series primanorum indicem habeat 1, series hinc reciproca indicem habebit -1, ideoque per

per Prop. 64.) ratio proveniens erit 1 ad $-1+1$. hoc est 1 ad 0.

PROP. CIV. *Theorema.*

SI deniq; ejusmodi Figura $AD\beta\beta$, sic continuo decrescat juxta seriem quæ sit reciproca directæ indicem habenti unitate majorem; habebit illa ad Parallelogrammum inscriptum rationem plusquam infinitam: qualem nempe habere supponatur numerus positivus ad numerum negativum, sive minorem nihilo. Nempe eam, quam habet 1 ad indicem unitate auctum.



Puta cum indices seriei secundanorum, Tertianorum Quartanorum, &c. sint 2, 3, 4, &c. (unitate majores,) indices serierum illis reciprocarum erunt -2, -3, -4, &c. qui quamvis unitate augeantur (juxta Prop. 64.) manebunt tamen negativi, puta $-2+1=-1$, $-3+1=-2$, $-4+1=-3$, &c. & propterea ratio quam habet 1 ad indices illos sic auctos, puta 1 ad -1, 1 ad -2, 1 ad -3, &c. major erit quam infinita, sive 1 ad 0; quia nempe rationum consequentes sunt minores quam 0.

Atque idem continget, si sumatur reciproca seriei radicum quadraticarum Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum &c. (cujus indices sunt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c.) vel indicum cubicarum Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. (cujus indi-

ces

ces sunt $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{4}{3}$, &c.) aut cuivis denique serici cujus index est unitate major. Ut patet.

PROP. CV. *Theorema.*

SI ejusmodi figura AD$\beta\beta$ verticem habens A∞ infinitum & basin Dβ determinatam, rationem habeat ad inscriptum parallelogrammum AD$\beta\infty$ majorem quam infinitam: eadem figura AD$\beta\beta$ verticem habens AD infinitum & basin $\infty\beta$ determinatam, rationem habebit ad inscriptum Parallelogrammum A$\infty\beta$D minorem quam infinitam (finitam nempe:) Et contra, si situ illo considerata rationem habeat minorem quam infinitam; situ hoc habebit rationem majorem quam infinitam: Si deniq; in situ uno rationem habeat simpliciter infinitam (puta neq; majorem neq; minorem) etiam & situ altero habebit rationem simpliciter infinitam.

Nam verbi gratia, in serie secundanis reciproca, cum sint (per Prop. 99.) rectæ D β, D β, in diametrorum A D, A D, ratione reciprocæ duplicata; erunt e converso rectæ AD, AD, hoc est $\infty\beta$, $\infty\beta$, in rectarum D β, D β, hoc est, diametrorum A ∞, A ∞, ratione reciprocæ subduplicata; adeoque ipsæ $\infty\beta$, $\infty\beta$, &c. sunt series secundanis reciproca. Et contra. Atque (cum idem etiam in aliis ejusmodi seriebus contingat) patet propositum per Prop. 102, & 104.

In serie vero primanis reciproca; cum (per Prop. 88.) rectæ D β, D β, sint diametris A D, A D, reciproce proportionales; erunt etiam rectæ $\infty\beta$, $\infty\beta$ diametris suis A ∞, A ∞, reciproce proportionales, ipsæque $\infty\beta$. $\infty\beta$, series item primanis reciproca. Constat ergo propositum per Prop. 103.

PROP. CVI. *Theorema.*

SI series aliqua reciproca per seriem aliam (sive reciprocam sive directam) multiplicetur aut dividatur

tur, vel etiam aliam multiplicet aut dividat; eædem leges obſervandæ ſunt quæ in ſeriebus directis prop. 73 & 81.

Exſempli gratia. Si ſeries ſecundanis reciproca (puta $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}$, &c.) cujus index -2 reſpective multiplicetur in ſeriem Tertianis reciprocam (puta $\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}$, &c.) cujus index eſt -3; prodibit ſeries ſubquintanis reciproca $\frac{1}{1}, \frac{1}{32}, \frac{1}{243}$, &c.) cujus index $-5 = -2-3$ ut patet.

Item ſi ſeries tertianis reciproca ($\frac{1}{1}, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}$, &c.) cujus index -3; reſpective multiplicetur per ſeriem ſecundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit ſeries $\frac{1}{1}, \frac{4}{8}, \frac{9}{27}$, &c. hoc eſt $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, &c. Primanis reciproca, cujus index $-1 = -3+2$.

Item ſi ſeries ſubſecundanis reciproca $\left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right.$ &c.$\left.\right)$ cujus index $-\frac{1}{2}$; reſpective multiplicetur in ſeriem ſecundanorum (1, 4, 9, &c.) cujus index 2; prodibit ſeries $\left(\frac{1}{\sqrt{1}}, \frac{4}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{3}}\right.$ &c. vel $\frac{1}{1}\sqrt{1}, \frac{4}{2}\sqrt{2}, \frac{9}{3}\sqrt{3}$, &c. vel $1\sqrt{1}, 2\sqrt{2}, 3\sqrt{3}$, &c. vel $\sqrt{1}, \sqrt{8}, \sqrt{27}$, &c.) radicum quadraticarum cuborum ſeu tertianorum, cujus index $\frac{1}{3} = -\frac{1}{3}+2$.

Item, ſi ſeries ſecundanis reciproca, cujus index -2, dividat ſeriem Primanis reciprocam, cujus index -1; prodibit ſeries Primanorum, cujus index $1 = -1+2$, nempe -1 minus -2.

$\frac{1}{1}) \quad 1 \quad (\frac{1}{1} = 1$
$\frac{1}{4}) \quad 2 \quad (\frac{4}{2} = 2$
$\frac{1}{9}) \quad \frac{1}{3} \quad (\frac{9}{3} = 3$
&c.

Item ſi ſeries Primanis reciproca, cujus index -1, dividat ſeriem ſecundanis reciprocam, cujus index -2; prodibit ſeries Primanis reciproca, cujus index $-1 = -2+1$; nempe -2 minus -1.

$\frac{1}{1}) \quad 1 \quad (\frac{1}{1} = 1$
$\frac{1}{2}) \quad \frac{1}{4} \quad (\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}) \quad \frac{1}{9} \quad (\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$
&c.

Item, ſi ſeries primanis reciproca, cujus index -1, dividat ſeriem ſecundanorum, cujus index 2; prodibit ſeries tertianorum, cujus index $3 = 2+1$, nempe 2 minus -1.

$\frac{1}{1}) \quad 1 \quad (1$
$\frac{1}{2}) \quad 4 \quad (8$
$\frac{1}{3}) \quad 9 \quad (27$
&c.

Item

Item si seriem Primanis reciprocam, cujus index -1, dividat series secundanorum, cujus index 2; prodibit series Tertianis reciproca, cujus index $-3 = -1-2$, nempe -1 minus 2.

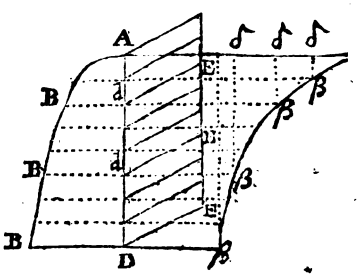
1)	$\frac{1}{1}$	$(\frac{1}{1}$
4)	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{8}$
9)	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{27}$
	&c.	

Atque idem continget, in aliis quibusvis hujusmodi seriebus. Adeoque constat propositum.

PROP. CVII. *Corollarium.*

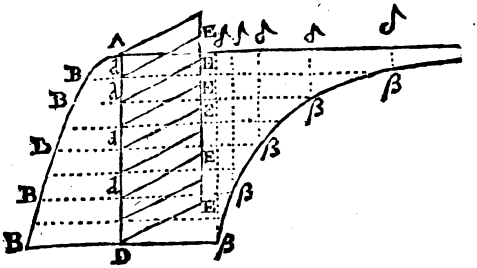
ET propterea; *Si ad hujusmodi figuram A D B A, (ex una parte in infinitum productam) juxta quamcunq; seriem reciprocam, aptetur (eo modo quo 9 Prop. Con. Sect. & alibi supra ostendi;) Pyramidoides vel Conoides inversum, (seu potius Calatoides:) habebit illud ad cylindrum aut Prisma inscriptum (super eadem basi æquè-altum) eam rationem, sive finitam sive infinitam sive plusquam infinitam, quam præcedentia Theoremata docebunt.*

Puta, si planum sit rectarum series subtertianis reciproca, cujus index $-\frac{1}{3}$, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inscriptum (per Prop. 64, & 102) ut 1 ad $\frac{1}{3}$ ($= -\frac{1}{3}+1$) hoc est, ut 3 ad 2: solidum ex totidem planis constans in rectarum earum ratione duplicata, erit series Quadratis subtertianorum reciproca, cujus index (per Prop. 106.) $-\frac{2}{3} = -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}$, vel $-\frac{1}{3}$ plus $-\frac{1}{3}$, & ratio illius solidi ad inscriptum cylindrum vel Prisma (super eadem basi æque-altum) ut 1 ad $\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}+1$, vel ut 3 ad 1 utrobique ratio finita. per Prop 64 & 102.



Si planum, sit series subsecundanis reciproca, cujus index $-\frac{1}{2}$, adeoque ratio ipsius ad Parallelogrammum inscriptum

ut 1 ad $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1$, vel ut 2 ad 1 : (per Prop. 101, 102,) ſolidum ex totidem planis in rectarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries quadratis ſubſecundanorum reciproca, vel (quod tantundem valet) ſeries Primanis reciproca, cujus index $-\frac{2}{2}$, vel $-1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$. Ideoque ratio hujus ſolidi ad cylindrum vel Priſma (ſuper eadem baſi æqualtum) ut 1 ad $-1 + 1 = 0$. (per Prop 103.) Nempe illic ratio finita, hic ſimpliciter infinita.



Si planum ſit ſeries Quadratis ſubtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{2}{3}$, ejuſque ratio ad Parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} + 1$, vel ut 3 ad 1. (per Prop. 102.) ſolidum ex planis totidem in rectarum illarum duplicata ratione conſtans, erit ſeries Biquadratis Subtertianorum reciproca, cujus index $-\frac{4}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}$, & propterea ratio ipſius ad inſcriptum cylindrum vel Priſma ſuper eadem baſi æque-altum, ut 1 ad $-\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3}$, vel ut 3 ad -1 (per Prop. 104.) Nempe illic ratio finita, hic pluſquam infinita.

Si planum ſit ſeries primanis reciproca, cujus index -1, adeoque ratio quam habet ad Parallelogrammum inſcriptum 1 ad $-1 + 1 = 0$: (per Prop 103) Solidum ex planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries Quadratis Primanorum (hoc eſt, ſecundanis) reciproca, cujus index -2, & propterea ratio ipſius ad Cylindrum vel priſma ſuper eadem baſi æque altum, ut 1 ad $-2 + 1$, ſeu ut 1 ad -1. (per P. 104) Nempe illic ratio ſimpliciter infinita, hic pluſquam infinita.

Si planum ſit ſeries ſecundanis reciproca, cujus index -2, adeoque ratio quam habet ad parallelogrammum inſcriptum ut 1 ad $-2 + 1 = -1$. Solidum ex totidem planis in rectarum illarum ratione duplicata conſtans, erit ſeries quadratis ſecundanorum, hoc eſt quartanis, reciproca, cujus index $-4 = -2 - 2$; ejuſque ratio ad Cylindrum vel Priſma de-

hinc

bite inſcriptum, ut 1 ad $-4+1=-3$. (per Prop. 104.) Nempe utrobiq; ratio pluſquam infinita.

SCHOLIUM.

Atque ita problema illud (ingenioſum quidem, & non paucis mirandum,) quod Torricellius in una figura ſolida præſtitit, (puta, *Solido Hyperbolico aucto* in infinitum continuato, æquale cylindrum conſtituere) nos in aliis innumeris figuris tam planis quam ſolidis (præcedentibus ſex propoſitionibus continuis) præſtitimus. Puta, *Figuris innumeris ſpecie differentibus, tam planis quam ſolidis, interminatis, æquales figuras terminatas* (vel ſaltem, quod tantundem valet, in cognita ratione conſtitutas) *exhibere.*

Conſultius fortaſſis eſſet, (ſi tantum aucupandæ famæ operam darem,) celata methodo qua huc perventum eſt, paucas aliquot particulares propoſitiones (tanquam admirandum quidpiam aut ſtupendum) demonſtrationibus apagogicis oſtendiſſe. quod veteres olim non raro feciſſe, plane ſuſpicor; qui illud ſæpius ſibi videntur propoſuiſſe, ut ipſos alii admirentur potius quam intelligant; ſaltem ut illis eorum effatis aſſenſum coacti præbeant, potius quam ut genuinam problematis inveſtigationem intelligant. Atque hinc factum eſſe credo, quod eorum Analytice (quam quidem ipſos habuiſſe ex multis ipſius, in demonſtrationibus eorum non paucis, veſtigiis ſatis liquet) poſteros fere penitus latuerit; (exigua enim plane pars illa eſt quæ apud Diophantum exſtat, ſi ad egregia illa quo ipſi pervenerunt inventa comparetur:) Ut neceſſe habuerint præſentis ævi mathematici (*Vieta, Oughtredus, Harriotus, Ghetaldus, Cavallerius, Torricellius, Charteſius*, aliique magni viri) vel novam excogitare, vel antiquam ſaltem, (conclamatam plane & penitus ignoratam) de novo reſuſcitare; quod quidem eo ſucceſſu præſtiterunt, ut noſtram nunc dierum Analyticen, veterum iſtam, tanta ſuperſtitione celatam, æquare ſaltem vel ſuperare potius nullus dubitem.

Verum ergo mallem libere philoſophando, fontes ipſos aperire, ut eadem opera poſſit lector & propoſitionum demonſtrationes & methodum qua iſtuc pervenerim perſentiſcere; unde & ipſe poſſit proprio marte ejuſmodi alias innumeras inveſtigare, quas ego (ne tædio ſim) lubens prætereo, contentus eo digitum intendiſſe, unde alii alia noſtris ſimilia pro libitu depromant.

Digitized by Google

Licuisset quidem & præmissis multa subjungere, & multa passim interpolare, quæ ex principiis jam traditis facile deduci possent. Verum cum ea, quæ jam tradidi, mihi videantur abunde sufficere, ut & ipsa perspicue satis intelligantur, & perfectam satis *seriorum* (tam simplicium quam compositarum & utriusque Reciprocarum) tractationem videantur continere: ad series *Conjunctas* (sive ad Binomiorum sive Apotomarum formam) explicandas, festinandum sentio.

PROP. CVIII. *Theorema.*

SI series Æqualium serie Primanorum respective mulctetur (puta, si primus terminus hujus a primo illius auferatur, secundus a secundo, &c.) Residua erunt semissis totius: sin ita augeatur; Aggregatorum series erit expositæ seriei Æqualium sesquialtera.

Intellige, si Æqualium & Primanorum terminus ultimus idem sit (vel æqualis) Quod & deinceps aliquoties intelligendum erit: sin fuerint inæquales, non tamen erit difficile rationes provenientes invenire; quod monuisse sufficiat, cum id quilibet suo marte præstare poterit.

Sit verbi gratia terminus Æqualium quilibet & primanorum maximus R; ejusque pars infinite parva dicatur $a = \frac{R}{\infty}$; numerus terminorum omnium (vel figuræ altitudo A:) si Termini.

R − 0 *a*	R + 0 *a*
R − 1 *a*	R + 1 *a*
R − 2 *a*	R + 2 *a*
R − 3 *a*	R + 3 *a*
&c.	&c.

continuentur in infinitum usque ad R − R R + R

erit Residuorum & Aggregatorum summa .. $\overline{AR - \frac{1}{2}AR}$ $\overline{AR + \frac{1}{2}AR}$

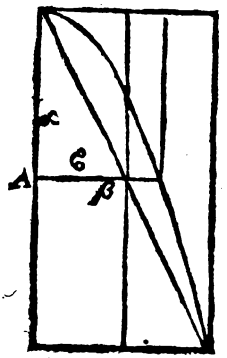
Nam omnium Æqualium agregatum erit AR (ut patet;) Primanorum aggregatum eiusdem semissis $\frac{1}{2}$ AR, per Prop. 2.) Ergo $AR - \frac{1}{2}AR = \frac{1}{2}AR$, & $AR + \frac{1}{2}AR = \frac{3}{2}AR$. Nempe seriei Æqualium (AR) illud est $\frac{1}{2}$, hoc $\frac{3}{2}$: prout affirmatur. Hoc est, erit illud ad seriem æqualium ut $\frac{1}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad 2; hoc autem, ut $\frac{3}{2}$ ad 1, vel ut 1 ad $\frac{2}{3}$, vel 3 ad 2.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CIX. *Coroll.*

ERgo, *Si Parallelogrammò auferatur Triangulum (ſuper eâdem vel æquali baſe æquè-altum) Reſiduum (quod quidem & ipſum erit Triangulum inverſum) erit Parallelogrammi ſemiſſis: ſin addatur Triangulum, erit aggregatum (nempe Trapezium) ſeſquialterum.*



Patet ex præcedenti; eſt enim Parallelogrammum ſeries Æqualium; Triangulum, ſeries Primanorum.

PROP. CX. *Coroll.*

ITem, *Cylindrus Parabolicè excavatus, eſt pleni ſemiſſis. (Quod idem verum eſt de Priſmate analogice excavato.)*

Nempe ſi ex Cylindro (ſerie nempe Æqualium (eximatur conoides Parabolicum (ſuper eadem baſe æque-altum) quod quidem eſt ſeries primanorum (per Prop. 4, vel 60.) quod reliquum eſt erit ſemiſſis totius per Prop. 108.

Atque idem accidet ſi Priſmati eximatur Pyramidoides Parabolicum.

PROP. CXI. *Theorema.*

SI Series Æqualium mulctetur ſerie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Reſidua erunt totius duo Trientes, tres Quadrantes, quatuor Quintantes, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata

Digitized by Google

gregata ejuſdem Seſquitertium, Seſquiquartum, Seſquiquintum, &c.

Nempe ſi Termini

$R^2 \pm 0a^2$	$R^3 \pm 0a^3$	$R^4 \pm 0a^4$	
$R^2 \pm 1a^2$	$R^3 \pm 1a^3$	$R^4 \pm 1a^4$	
$R^2 \pm 4a^2$	$R^3 \pm 8a^3$	$R^4 \pm 16a^4$	
$R^2 \pm 9a^2$	$R^3 \pm 27a^3$	$R^4 \pm 81a^4$	
&c.	&c.	&c.	

continuentur uſq; ad $R^2 \pm R^2$ $R^3 \pm R^3$ $R^4 \pm R^4$

erunt ſummæ $AR^2 \pm \frac{1}{3}AR^2$. $AR^3 \pm \frac{1}{4}AR^3$. $AR^4 \pm \frac{1}{5}AR^4$ (per Prop. 44)

Hoc eſt, Reſiduorũ ſumma $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ &c.

Aggregatorum ſumma $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$. $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$. $1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5}$ &c.

PROP. CXII. *Coroll.*

ERgo, *ſi Parallelogrammo auferatur complementum Semi-parabolæ, Semi-paraboloidis cubicalis, Biquadraticalis, &c. Reſiduum (puta ſemi-parabola, ſemi-paraboloides cubicale, biquadraticale, &c.) erit* $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$, *&c. totius Parallelogrammi: ſin eidem Parallelogrammo ejuſmodi complementum addatur, erit aggregatum* $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$, *&c. Ejuſdem Parallelogrammi.*

Patet ex præcedente.

PROP. CXIII. *Coroll.*

ITem, *Cylindrus Conicè excavatus, (vel Priſma Pyramidicè,) continet integri duos trientes. Et ſimiliter de aliis excavationibus (mutatis mutandis) fiet judicium.*

Patet ex Prop. 111. ſubducta quippe ſerie ſecundanorum, ex ſerie Æqualium.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CXIV. *Theorema.*

SI Series Æqualium multetur serie subsecundanorum, subtertianorum, subquartanorum, &c. Residua erunt totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin ita augeatur, erunt Aggregata ejusdem quinq; Trientes, septem Quadrantes, novem Quintantes, &c. vel, duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.

Nēpe si termini.	$\sqrt{R} \pm \sqrt{0a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{0a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{0a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{1a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{1a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{1a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{2a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{2a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{2a}$
	$\sqrt{R} \pm \sqrt{3a}$	$\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{3a}$	$\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{3a}$
	&c.	&c.	&c.
Continuentur ad	$\frac{\sqrt{R} \pm \sqrt{R}}{}$	$\frac{\sqrt[3]{R} \pm \sqrt[3]{R}}{}$	$\frac{\sqrt[4]{R} \pm \sqrt[4]{R}}{}$
Erūt summæ (per prop. 54.)	$A\sqrt{R} \pm \frac{1}{1} A\sqrt{R}$.	$A\sqrt[3]{R} \pm \frac{2}{1} A\sqrt[3]{R}$.	$A\sqrt[4]{R} \pm \frac{3}{1} A\sqrt[4]{R}$
Hoc est, Residuorum summa	$1 - \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$	$1 - \frac{2}{1} = \frac{1}{1}$	$1 - \frac{3}{1} = \frac{1}{1}$
Aggregatorum summa	$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$	$1 + \frac{2}{1} = \frac{3}{1}$	$1 + \frac{3}{1} = \frac{4}{1}$

PROP. CXV. *Corollarium.*

ERgo, *Si Parallelogrammo auferatur Parabola, Paraboloides Cubicale, Biquadraticale, &c. Residuum erit totius Triens, Quadrans, Quintans, &c. Sin addatur, erit Aggregatum Parallelogrammi duplum minus Triente, Quadrante, Quintante, &c.*

Sequitur ex præced.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CXVI. *Theorema.*

PAri modo judicandum erit in seriebus aliis seriei Æqualium addendis vel subducendis; quarum quantitas innotescit ex prop. 59. vel 64.

Puta ſi termini	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{0a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{0a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{0a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{1a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{1a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{1a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{8a^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{4a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{16a^4}$.
	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{27^2}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{9a^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{81a^4}$.
	&c. ad	&c ad	&c. ad
continuentur ad	$\sqrt{R^3} \pm \sqrt{R^3}$	$\sqrt[3]{R^2} \pm \sqrt[3]{R^2}$	$\sqrt[3]{R^4} \pm \sqrt[3]{R^4}$.
ſumma	$A\sqrt{R^3} \pm \frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$	$A\sqrt[3]{R^2} \pm \frac{3}{5}A\sqrt[3]{R^2}$	$A\sqrt[3]{R^4} \pm \frac{4}{7}A\sqrt[3]{R^4}$
Hoc eſt, Reſidua	$1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.	$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$	$1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}$
Aggregata	$1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5}$	$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$	$1 + \frac{4}{7} = \frac{11}{7}$

Et ſimiliter (mutatis mutandis) in aliis quibuſcunq;.

PROP. CXVII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Primanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Placet autem pro notis $1a$, $2a$, $3a$, &c. (in præcedentibus propoſitionibus uſurpatis) jam ſubſtituere a, b, c, &c. quo melius operationis proceſſus perſpiciatur.

PROP.

Digitized by Google

Seriei	Quadrata.	Cubi
$R - o$	$R^2 - oR + oo$	$R^3 - oR^2 + oR - ooo$
$R - a$	$R^2 - 2aR + a^2$	$R^3 - 3aR^2 + 3a^2R - a^3$
$R - b$	$R^2 - 2bR + b^2$	$R^3 - 3bR^2 + 3b^2R - b^3$
$R - c$	$R^2 - 2cR + c^2$	$R^3 - 3cR^2 + 3c^2R - c^3$
&c. ad	&c. ad	&c. ad
$R - R$	$R^2 - 2RR + R^2$	$R^3 - 3RR^2 + 3R^2R - R^3$
$AR - \frac{1}{2}AR$	$AR^2 - \frac{2}{3}AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$	$AR^3 - \frac{3}{4}AR^3 + \frac{3}{10}AR^3 - \frac{1}{20}AR^3$
nempe $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{0}{3}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{10} - \frac{1}{20} = \frac{0}{20}$
vel $\frac{1}{2}$	$\frac{1 \times 2}{2 \times 3}$	$\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}$

Et sic deinceps, continuè multiplicando numeros arithmeticè proportionales, (prout potestatis gradus postulat) ab 1 & 2, unitate continuè crescentes.

Et quidem nihil aliud sunt quam totidem series Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. inversæ.

PROP. CXVIII. *Theorema.*

SI supponatur series Æqualium mulctata serie secundanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium rationem habebunt cognitam. Nempe

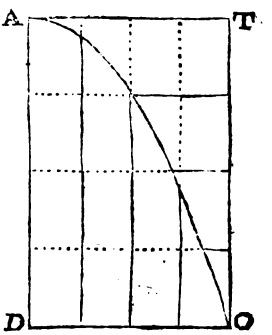
Seriei	Quadrata	Cubi
$R^2 - oo$	$R^4 - ooR^2 + oo$	$R^6 - ooR^4 + ooR^2 - ooo$
$R^2 - a^2$	$R^4 - 2a^2R^2 + a^4$	$R^6 - 3a^2R^4 + 3a^4R^2 - a^6$
$R^2 - b^2$	$R^4 - 2b^2R^2 + b^4$	$R^6 - 3b^2R^4 + 3b^4R^2 - b^6$
$R^2 - c^2$	$R^4 - 2c^2R^2 + c4$	$R^6 - 3c^2R^4 + 3c^4R^2 - c^6$
&c. ad	&c. usq; ad	&c. usq; ad
$R^2 - R^2$	$R^4 - 2R^2R^2 + R^4$	$R^6 - 3R^2R^4 + 3R^4R^2 - R^6$
summa $AR^2 - \frac{1}{3}AR^2$	$AR^4 - \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$	$AR^6 - \frac{3}{4}AR^6 + \frac{3}{10}AR^6 - \frac{1}{35}AR^6$
nempe $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{10} - \frac{1}{35} = \frac{48}{280}$
vel $\frac{3}{4}$	$\frac{2 \times 4}{3 \times 5}$	$\frac{2 \times 4 \times 6}{3 \times 5 \times 7}$

Digitized by Google

Et ſic deinceps, continue multiplicando numeros arithmeticè proportionales (quouſque gradus poteſtatis poſtulat) 2 2 & 3 continue binario creſcentes.)

PROP. CXIX. *Corollarium.*

ET propterea, *Conoides (vel Pyramidoides) ſemiparabolæ (aut etiam Parabolæ) circa ipſius ordinatim-applicatam aptatum, erit ad Cylindrum (vel Priſma) ejuſdem baſis & altitudinis, ut* 8 *ad* 15.



Nempe ut Quadrata reſiduorum ſeriei Æqualium mulctatæ ſerie ſecundanorum, (ad totidem maximo æqualium) Nam ſi volvendo ſemiparabolam A D O circa ipſius ordinatim-applicatam D O, ut axem (vel etiam alias, ut Prop. 9 Con. Sect. diximus,) formetur conoides (vel Pyramidoides) cujus vertex O: erunt plana illa Conoides (vel Pyramidoides) conſtituentia ut Quadrata ſeriei Æqualium ſerie ſecundanorum mulctatæ: (Nam rectæ in ſemiparabola A D O Diametro A D parallelæ, ſunt reſiduæ Æqualium ablatis ſecundanis, in complemento A T O repertis, ut patet ex dictis Prop. 23.) Ideoq; ad totidem maximo æqualia (hoc eſt, Cylindrum vel Priſma,) ut 8 ad 15 per præcedentem.

SCHOLIUM.

Et pari modo de conoidibus vel Pyramidoidibus ad Paraboloidis cujuſvis ordinatim applicatam aptatis, judicium fiet, ope ſequentium propoſitionum. Puta in Paraboloide cubicali ratio erit ut 9 ad 14; in Biquadratica illi, ut 32 ad 45; in ſurdeſolidali, ut 25 ad 33, &c. ut in tab. Prop. 126.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CXX. *Corollarium.*

DEinde, *Si infinita ſeries Æqualium multata ſerie Primanorum, in eandem ſeriem Æqualium eâdem ſerie Primanorum auctam, reſpectivè ducatur: Rectangulorum (vel Quadratorum aut etiam ſimilium quarumvis figurarum, ipſis æqualium, aut quidem proportionalium) Aggregatum, ad aggregatum totidem maximo Æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atq; idem accidet, ſi Quadrata ſeriei multatæ ducantur in Quadrata ſeriei auctæ; & Cubi illius in Cubos hujus; & ſic deinceps.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. 118. Nam

in $R-a$: $Q:R-a::=R^2-2aR+a^2$

in $R+a$: $Q:R+a::=R^2-2aR+a^2$

facit R^2-a^2 : $R^4-2a^2R^2+a^4$

&c. &c.

in $C:R-a::=R^3-3aR^2+3a^2R-a^3$

in $C:R+a::=R^3+3aR^2+3a^2R+a^3$

facit $R^6-3a^2R^4+3a^4R^2-a^6$

&c.

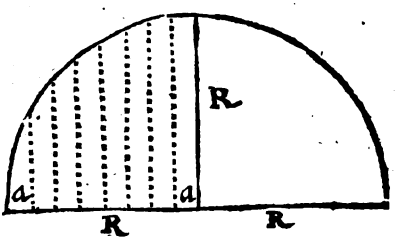
& ſic in ſingulis terminis cujuſvis poteſtatis; ut multiplicando patebit Prop. 121.

PROP. CXXI. *Corollarium.*

IDeoq; *Circulus ad Quadratum Diametri, (vel etiam Ellipſis quælibet ad Parallelogrammum ſibi circumſcriptum,) eam habet rationem, quam habent Radices quadraticæ univerſales Reſiduorum ſeriei infinitæ Æqualium ſerie Secundanorum multatæ, ad ſeriem illam Æqualium.*

Digitized by Google

Nam si circuli Radius ponatur R, (cujus Pars infinite parva $\frac{R}{\infty} = a$,) eique insistant Perpendiculares sive sinus recti numero infiniti Quadrantem circuli complentes; erunt illæ perpendiculares mediæ proportionales inter Diametri Segmenta, (ut notum est;) hoc est.



inter	$R+0$,	$R+1a$,	$R+2a$,	$R+3a$,	&c.
&	$R-0$,	$R-1a$,	$R-2a$,	$R-3a$,	&c.
quorũ Rectangula,	R^2-00,	R^2-1a^2,	R^2-4a^2,	R^2-9a^2	&c.
Ipsæq; mediæ proportionales	$\sqrt{:R^2-00}$.	$\sqrt{:R^2-1a^2}$.	$\sqrt{:R^2-4a^2}$,	$\sqrt{:R^2-9a^2}$,	&c.

Quam igitur rationem habent harum radicum universalium Aggregatum, ad totidem maximæ (Radio scil.) æqualium, eam habet quadrans circuli (ex illis constans) ad quadratum Radii (constans ex his) Adeoque & circulus integer ad quadratum Diametri. Quod erat ostendendum.

Atque idem de qualibet ellipsi (mutatis mutandis) facile ostendetur; cum ipsius etiam ordinatim applicatæ sint mediis proportionalibus (inter diametri trasversæ segmenta) proportionales, & quidem nonnunquàm æquales, ut ex conicorum doctrina notum est.

SCHOLIUM.

Ratio autem quam innuit hæc propositio (circuli nempe ad quadratum Diametri) ea est, quam habet Unitas ad numerum intermedium inter 1 & $\frac{1}{2}$ in secunda serie Transversa Tabellæ Prop 127. Quomodo autem invenietur numerus ille (vel alius quivis istius seriei numeris interponendus) deinceps inquirendum erit.

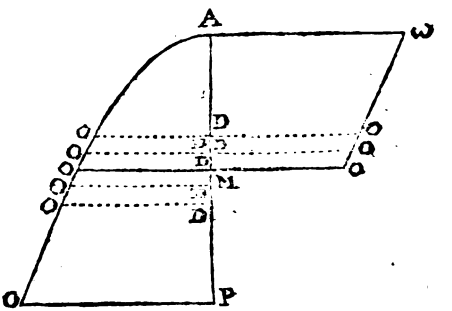
PROP.

Digitized by Google

PROP. CXXII. *Corollarium.*

ET proinde, *si supponamus infinitas rectas semiparabolæ cujusvis, in ejusdem continuationis æquèalte & situ inverso positæ rectas, respectivè ductis quod provenit solidum ex infinitis illis Rectangulis conflatum (aut ex Quadratis quæ rectangulis illis sint æqualia) erit ad Parallelepipedum super eadem basi æquè-altum, ut circulus ad Quadratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in subduplicatâ ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel Ellipsi.)*

Semiparabolam quamlibet APO, secet recta MO (basi parallela) in duo segmenta æque alta; & Recta MO dicatur √ R. Erunt reliquæ ordinatim-applicatæ in segmento superiori ascendendo, √:R — a. √:R — 2a. √:R — 3a. &c. Et in segmento inferiori descendendo, √:R + a. √:R + 2a. √:R + 3a. &c. (propter quadratas ordinatim-applicatarũ in parabola, arithmetice proportionalia) Ideoq; si supponamus semiparabolã ita sectam sic in se replicari, ut punctum P puncto A congruat, totumq; segmentum MPO transferatur in situm MAω, (ut ordinatim-applicatæ inferioris segmenti ordinatim applicatis superioris inverse respondeant) rectangula, OD o, OD o, &c. Erunt √:R² — o. √:R² — a². √:R² — 4a² √:R² — 9a², &c. ut multiplicatione patebit.



√:R — o.	√:R — a.	√:R — 2a.	√:R — 3a.
√:R + o.	√:R + a.	√:R + 2a.	√:R + 3a.
√:R² — o	√:R² — a²	√:R² — 4a²	√:R² — 9a², &c.

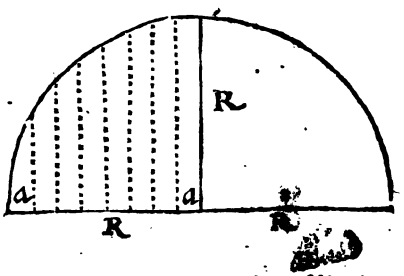
Digitized by Google

Horum igitur omnium aggregatum, ad maximum ($\sqrt{:}R^2 - o := \sqrt{R^2} = R$) toties positum, hoc est, solidum propositum ad Parallelepidum ejusdem basis & altitudinis,) ut circulus ad quadratum Diametri per præced. Et propterea etiam mediæ proportionales erunt in subduplicata ratione ordinatim applicatarum in circulo vel ellipsi, ut patet.

PROP. CXXIII. *Corollarium.*

ITem, *Sphæra (vel Sphæroides aut etiam Pyramidoides Ellipticum,) ad cylindrum (vel Prisma) circumscriptum; est ut series infinita Æqualium mulctata serie secundanorum, ad seriem totidem maximo Æqualium. Hoc est ut 2 ad 3.*

Sequitur ex Prop. 121. Nam si mediæ proportionales inter diametri segmenta, quadrantem circuli (vel ellipseos) complentes, jam fieri supponantur totidem aliorum circulorum invicem parallelorum radii, semissem sphæræ (vel sphæroideos) complentium, (vel similium quorumvis planorum rectæ similiter positæ semipyramidoides ellipticum constituentium;) erunt hi circuli (vel plana) in duplicata ratione Radiorum suorum (sive rectarum similiter positarum:) Hoc est, ut $R^2 - o$. $R^2 - a^2$. $R^2 - 4a^2$ $R^2 - 9a^2$, &c. (sunt enim rectæ illæ $\sqrt{:}R^2 - o$. $\sqrt{:}R^2 - a^2$. $\sqrt{:}R^2 - 4a^2$. $\sqrt{:}R^2 - 9a^2$ &c. per Prop. 121.) Ideoque horum omnium aggregatum, ad aggregatum omnium maximo æqualium ut 2 ad 3. per Prop. 118.



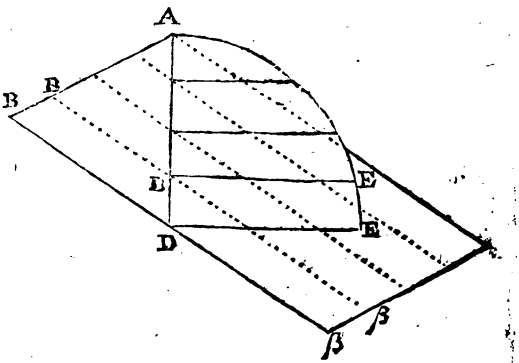
PROP.

Digitized by Google

PROP. CXXIV. *Corollarium.*

ITem, *ſi Trianguli A D B rectæ reſpective ducantur in rectas Trapezii A D B (æque-alti, atque cum ipſo Triangulo Parallelogrammum complentis ;) quæ prodeunt rectangula erunt æqualia totidem ſimilibus planis Conoideos (vel Pyramidoideos) elliptici: Et mediæ proportionales D E, D E, &c. Erunt ordinatim applicatæ in (Circulo, vel ſaltem) Ellipſi.*

Demonſtratio facile patet ex dictis ad Prop. 121. Et 123. Nam ſegmenta rectæ Bβ in hac figura tantundem valent atque ſegmenta Diametri in illa figura.



Si autem tam rectæ A D, D B, ſint æquales, quam rectæ A D, D E, ad invicem perpendiculares, erunt ipſæ D E, D E, ordinatim applicatæ in circulo ; ſint minus, ſaltem in ellipſi. Portio autem ſive circuli ſive Ellipſeos A E, major eſt aut minor quam Quadrans, prout D B major eſt aut minor quam D β.

PROP. CXXV. *Corollarium.*

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie Tertianorum ; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium

æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nempe,

Seriei	Quadrata	Cubi.
$R^3 - 000$	$R^6 - 00R^3 + 00$	$R^9 - 00R^6 + 00R^3 - 00$
$R^2 - a^3$	$R^6 - 2a^3R^3 + a^6$	$R^9 - 3a^3R^6 + 3a^6R^3 - a^9$
$R^3 - b^3$	$R^6 - 2b^3R^3 + b^6$	$R^9 - 3b^3R^6 + 3b^6R^3 - b^9$
$R^3 - c^3$	$R^6 - 2c^3R^3 + c^6$	$R^9 - 3c^3R^6 + 3c^6R^3 - c^9$
&c. ad	&c. usq; ad	&c. usq; ad
$R^3 - R^3$	$R^6 - 2R^3R^3 + R^6$	$R^9 - 3R^3R^6 + 3R^6R^3 - R^9$
fūma $AR^3 - \frac{1}{4}AR^3$	$AR^6 - \frac{2}{4}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$	$AR^9 - \frac{3}{4}AR^9 + \frac{3}{7}AR^9 - \frac{1}{10}AR^9$
nēpe $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$	$1 - \frac{2}{4} + \frac{1}{7} = \frac{1}{2}\frac{8}{8}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{7} - \frac{1}{10} = \frac{1}{2}\frac{5}{8}\frac{2}{0}$
vel $\frac{3}{4}$	$\frac{3 \times 6}{4 \times 7}$	$\frac{2 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10}$

& sic deinceps, continue mutiplicando numeros arithmetice proportionales (quousque cujuslibet potestatis gradus postulat) a 3 & 4, ternario continue crescentes.

PROP. CXXVI. *Coroll.*

Pari modo, si exponatur series Æqualium multata serie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$. $1 - \frac{2}{5} + \frac{1}{9} = \frac{2}{4}\frac{2}{5}$. $1 - \frac{3}{5} + \frac{3}{9} - \frac{1}{13} = \frac{3}{5}\frac{8}{8}\frac{4}{5}$ $1 - \frac{4}{5} + \frac{6}{9} - \frac{4}{13} + \frac{1}{17} = \frac{6}{9}\frac{1}{9}\frac{4}{4}\frac{4}{5}$.

vel $\frac{4}{5}$ $\frac{4 \times 8}{5 \times 9}$ $\frac{4 \times 8 \times 12}{5 \times 9 \times 13}$ $\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17}$

Itē $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$. $1 - \frac{2}{6} + \frac{1}{11} = \frac{2}{6}\frac{0}{6}$. $1 - \frac{3}{6} + \frac{3}{11} - \frac{1}{16} = \frac{7}{1}\frac{1}{0}\frac{0}{6}$; $1 - \frac{4}{6} + \frac{6}{11} - \frac{4}{16} + \frac{1}{21} = \frac{2}{2}\frac{5}{1}\frac{0}{7}\frac{0}{6}$

vel $\frac{5}{6}$ $\frac{5 \times 10}{6 \times 11}$ $\frac{5 \times 10 \times 15}{6 \times 11 \times 16}$ $\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{6 \times 11 \times 16 \times 21}$

Et sic in aliis quibuslibet; nempe continue multiplicando numeros arithmetice proportionales (quousque gradus postulat) a 4 & 5, vel 5 & 6, vel 6 & 7, &c. quaternario, vel Quinario

Digitized by Google

nario, vel ſenario, &c. (ſecundum indicem ſeriei ſubductæ) continuè creſcentes. Prout inductiõne patebit. Ad hunc modum.

Ratio quam habet ad ſeriem maximo æqualium.

Seriei Æqualium multatæ ſerie	Reſidua. Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Surdeſolida.
Primanorſi	$\frac{1}{2}$. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{6}$.	$\frac{2}{6} \times \frac{2}{4} = \frac{4}{24}$.	$\frac{4}{24} \times \frac{4}{5} = \frac{16}{120}$.	$\frac{16}{120} \times \frac{4}{6} = \frac{64}{720}$.
Secũdanor.	$\frac{2}{3}$. $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$.	$\frac{8}{15} \times \frac{6}{7} = \frac{48}{105}$.	$\frac{48}{105} \times \frac{8}{9} = \frac{384}{945}$.	$\frac{384}{945} \times \frac{10}{11} = \frac{3840}{10395}$.
Tertianorſi.	$\frac{3}{4}$. $\frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{18}{28}$.	$\frac{18}{28} \times \frac{9}{10} = \frac{162}{280}$.	$\frac{162}{280} \times \frac{12}{13} = \frac{1944}{3640}$.	$\frac{1944}{3640} \times \frac{12}{14} = \frac{23328}{50960}$.
Quartanor.	$\frac{4}{5}$. $\frac{4}{5} \times \frac{8}{9} = \frac{32}{45}$.	$\frac{32}{45} \times \frac{12}{11} = \frac{384}{495}$.	$\frac{384}{495} \times \frac{16}{17} = \frac{6144}{8415}$.	$\frac{6144}{8415} \times \frac{20}{21} = \frac{122880}{176715}$.
Quintan.	$\frac{5}{6}$. $\frac{5}{6} \times \frac{10}{11} = \frac{50}{66}$.	$\frac{50}{66} \times \frac{15}{16} = \frac{750}{1056}$.	$\frac{750}{1056} \times \frac{20}{21} = \frac{15000}{22176}$.	$\frac{15000}{22176} \times \frac{25}{26} = \frac{375000}{576576}$.

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps.

Digitized by Google

Nempe, si index seriei ablatæ ponatur a; rationem habebunt, ad seriem maximo Æqualium, ipsa

Residua. Quadrata. Cubi. &c.

quam habent $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{a}{a+1} \times \frac{2a}{2a+1} \cdot \frac{a}{a+1} \times \frac{2a}{2a+1} \times \frac{3a}{3a+1}$ &c. } ad unitatem. vel

vel $\frac{a}{a+1} \cdot \frac{2a^2}{2a^2+3a+1} \cdot \frac{6a^3}{6a^3+11a^2+6a+1}$, &c. }

quã habet unitas ad $\frac{a+1}{a} \cdot \frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} \cdot \frac{a+1}{a} \times \frac{2a \times 1}{a} \times \frac{3a+1}{2a}$ &c.

vel $\frac{a+1}{a} \cdot \frac{2a^2+3a+1}{2a^2} \cdot \frac{6a^3+11a^2+6a+1}{6a^3}$ &c.

Atq; hoc idem valebit si ablata series sit series Radicum.

Verbi gratia. Si a serie Æqualium auferatur series Subsecundanorum cujus index $\frac{1}{2}$. Nam si ponatur $a = \frac{1}{2}$. Erit $\frac{a+1}{a} = 3$. Et $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} = 3 \times 2 = 6$. Et $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{a} \times \frac{3a+1}{3a} = 3 \times 2 \times 1\frac{2}{3} = 10$. &c. Sunt autem, in ejusmodi ablationibus, Residua, quadrata, Cubi, &c. ad seriem maximo æqualium; ut 1 ad 3. 6. 10. &c.

Similiter, si auferatur series Subquartanorum, cujus index $\frac{1}{4}$; & ponatur $a = \frac{1}{4}$. Erit $\frac{a+1}{a} = 5$. $\frac{2a+1}{2a} = 3$. $\frac{3a+1}{3a} = 2\frac{1}{3}$. $\frac{4a+1}{4a} = 2$. &c. $5 \times 3 = 15$. $15 \times 2\frac{1}{3} = 35$. $35 \times 2 = 70$. &c. Sunt autem, in ejusmodi Sublationibus, Residua, quadrata, cubi, biquadrata, &c. ut 1 ad 5, 15, 35, 70 &c. Et pariter in ejusmodi aliis, ut deinceps etiam ulterius patebit.

Interim placet propositiones aliquot præcedentes in Tabellam conjicere, propositioni sequenti subjungendam. Nempe.

PROP. CXXVII. *Theorema.*

SI exponatur (infinita) series Æqualium multata serie (analoga) Primanorum; Secundanorum, Tertianorum, &c. Residua ipsa, eorumq; Quadrata

Quadrata, Cubi, &c. Eam rationem habebunt ad expositam seriem Æqualium; quam habet Unitas ad numeros in subjecta Tabella indicatos. Nempe ---

Seriei Æqualium mulctatæ serie

	Resid.	Q.	Cubi	Biq.	Surdes.	Sextana.
Primanorum	2/1	6/2	24/6	120/24	720/120	5040/720
Secundanor.	3/2	15/3	105/48	945/384	10395/3840	135135/46080
Tertianorũ	4/3	28/18	280/162	3640/1944	58240/24160	1106560/524880
Quartanorũ	5/4	45/32	585/384	9945/6144	208845/92880	5221125/2949120
Quintanorũ	6/5	66/50	1056/750	22176/15000	576576/375000	17873856/11250000
Sextanorum	7/6	91/72	1729/1296	43225/31104	1339975/933120	49579075/35923200

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Sequitur ex præced.

SCHOLIUM.

Verum quo pacto investigabitur, quam habeant rationem serierum illarum Apotomarum Radices quadraticæ, Cubicæ, &c. ad seriem totidem earum maximæ æqualium: Hic labor hoc opus est. Nihil enim aliud deest ad Circuli & Ellipseos quadraturam. Ut ex Prop 121. jam patet, & ex propositionibus aliquot secuturis ulterius patebit.

PROP. CXXVIII. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium mulctata serie Subsecundanorum: Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Digitized by Google

Seriei.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{R} - \sqrt{a}$	$R - 2\sqrt{a}R + a$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{a} + 3a\sqrt{R} - a\sqrt{a}$
$\sqrt{R} - \sqrt{b}$	$R - 2\sqrt{b}R + b$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{b} + 3b\sqrt{R} - b\sqrt{b}$
$\sqrt{R} - \sqrt{c}$	$R - 2\sqrt{c}R + c$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{c} + 3c\sqrt{R} - c\sqrt{c}$
&c. ad	&c. ad	&c. usque ad
$\sqrt{R} - \sqrt{R}$	$R - 2\sqrt{RR} + R$	$R\sqrt{R} - 3R\sqrt{R} + 3R\sqrt{R} - R\sqrt{R}$
$A\sqrt{R} - \frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$AR - \frac{4}{3}AR + \frac{1}{2}AR$	$AR\sqrt{R} - \frac{6}{5}AR\sqrt{R} + \frac{3}{8}AR\sqrt{R} - \frac{2}{7}AR\sqrt{R}$
$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$	$1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$	$1 - \frac{6}{5} + \frac{3}{8} - \frac{2}{7} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{1 \times 2}$	$\frac{1}{1 \times 2 \times 3}$	$\frac{1}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$

Et sic deinceps; nempe eam rationem quam habet 1 ad numeros triangulares, sive aggregatum numerorum arithmetice proportionalium (quousque gradus potestatis postulat) ab 1 continue unitate crescentium.

PROP. CXXIX. *Corollarium.*

ET Propterea, *Conoides (vel Pyramidoides) Complemento Semiparabolæ circa ipsius Ordinatim-applicatam aptatum, est ad Cylindrum (vel prisma) ejusdem basis & altitudinis, ut 1 ad 6.*

Nempe ut quadrata residuorum seriei Æqualium multatæ serie subsecundanorum, ad totidem maximo æqualium. Cum enim in semiparabolæ complemento AOT, rectæ [illegible]s diametro AT parallelæ, sint residua Æqualium demptis subsecundanis nempe (ordinatim-applicatis in semi-parabola AOD;) si volvendo complementum illud AOT circa ipsam OT ut axem (vel etiam alias, ut alibi dictum est,) formetur conoides, (aut etiam Pyramidoides analogum, cujus vertex O; circuli sic volvendo descripti (vel similia plana similiter posita) erunt in rectarum illarum (ipsi AT parallelarum) ratione duplicata. Hoc est, ut quadrata Residuorum seriei Æqualium sublatis secundanis; ideoque ut 1 ad 6 per præced.

In Fig. Prop. 119.

SCHO-

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit de Conoidibus & Pyramidoidibus complementi ſemiparaboloidis cujuſvis circa ipſius ordinatim-applicatam aptatis, juxta propoſitiones ſequentes: Nempe mutatis mutandis, prout ſemiparaboloidis gradus poſtulaverit. Puta in ſemiparaboloide cubicali, ut 1 ad 10; in Biquadraticali, ut 1 ad 15; in Surdeſolidali, 1 ad 21. &c. juxta tabellam Prop. 131.

PROP. CXXX. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Æqualium mulctata ſerie ſubtertianorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{1}R - \sqrt[3]{1}a$	$\sqrt[3]{1}R^2 - 2\sqrt[3]{1}aR + \sqrt[3]{1}a^2$	$\sqrt[3]{1}R^3 - 3\sqrt[3]{1}aR^2 + 3\sqrt[3]{1}a^2R - \sqrt[3]{1}a^3$
$\sqrt[3]{1}R - \sqrt[3]{1}b$	$\sqrt[3]{1}R^2 - 2\sqrt[3]{1}bR + \sqrt[3]{1}b^2$	$\sqrt[3]{1}R^3 - 3\sqrt[3]{1}bR^2 + 3\sqrt[3]{1}b^2R - \sqrt[3]{1}b^3$
$\sqrt[3]{1}R - \sqrt[3]{1}c$	$\sqrt[3]{1}R^2 - 2\sqrt[3]{1}cR + \sqrt[3]{1}c^2$	$\sqrt[3]{1}R^3 - 3\sqrt[3]{1}cR^2 + 3\sqrt[3]{1}c^2R - \sqrt[3]{1}c^3$
&c. ad	&c. ad	&c. uſque ad
$\sqrt[3]{1}R - \sqrt[3]{1}R$	$\sqrt[3]{1}R^2 - 2\sqrt[3]{1}RR + \sqrt[3]{1}R^2$	$\sqrt[3]{1}R^3 - 3\sqrt[3]{1}RR^2 + 3\sqrt[3]{1}R^2R - \sqrt[3]{1}R^3$
$A\sqrt[3]{1}R - \frac{1}{4} = A\sqrt[3]{1}R$	$A\sqrt[3]{1}R^2 - \frac{2}{4}A\sqrt[3]{1}R^2 + \frac{1}{3}A\sqrt[3]{1}R^3$	$AR - \frac{3}{4}AR + \frac{2}{5}AR - \frac{1}{2}AR$
$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{6}{4} + \frac{3}{2} = \frac{3}{10}$	$1 - \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{20}$
1	1	1
$1 + 3 = 4$	$4 + 6 = 10$	$10 + 10 = 20$

Et ſic deinceps; continue addendo numeros triangulares ſeu aggregata numerorum arithmetice proportionalium, ut habeatur conſequens rationis cujus antecedens eſt 1.

Digitized by Google

PROP. CXXXI. *Theorema.*

Pari modo, Si exponatur series Æqualium multata serie Subquartanorum, Subquintanorum, &c. Resiliuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo æqualium, rationem habebunt cognitam.

Nam ut in subductione seriei subsecundanorum, consequentes rationum fiunt continua additione numerorum arithmetice proportionalium, $1+2=3$. $1+2+3=3+3=6$. $1+2+3+4=6+4=10$. $1+2+3+4+5=10+5=15$. $1+2+3+4+5+6=15+6=21$. &c Ita in subductione subtertianorum consequentes rationum fiunt continua additione numerorum illorum (3, 6, 10, 15, 21, &c.) in subductione subsecundanorum modo inventorum; nempe $1+3=4$. $4+6=10$. $10+10=20$. $20+15=35$. $35+21=56$. &c. vel $1+1+2=1+3=4$. $4+1+2+3=1+3+6=10$. $10+1+2+3+4=1+3+6+10=20$. $20+1+2+3+4+5=1+3+6+10+15=35$. $35+1+2+3+4+5+6=1+3+6+10+15+21=56$. &c. Deinde ex numerorum jam inventorũ (4, 10, 20, 35, 56, &c.) continua additione fiunt consequentes rationũ in subductione seriei subquartanorum, (nempe $1+4=5$. $5+10=15$. $15+20=35$. $35+56=91$. &c.) Et ex horum iterum continua additione, fiunt consequentes rationum in subductione seriei proximæ (subquintanorum;) Et sic deinceps ad hunc modum.

Ratio

Ratio quam habent ad seriem maximo Æqualium

Serici Æqualium multiplicatæ serie	Residua.	Quadrata.	Cubi.	Biquadrata.	Surdesolida	Sextana.
Primanor.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.	$\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+1}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+1}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+1}=\frac{1}{7}$.
Subsecun.	$\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+5}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+6}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+7}=\frac{1}{28}$.
Subtertia.	$\frac{1}{1+1}=\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{4+6}=\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{10+10}=\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{20+15}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+21}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+28}=\frac{1}{84}$.
Subquart.	$\frac{1}{1+3}=\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{5+10}=\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{15+20}=\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{35+35}=\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{70+56}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+84}=\frac{1}{210}$.
Subquint.	$\frac{1}{1+5}=\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{6+15}=\frac{1}{21}$.	$\frac{1}{21+35}=\frac{1}{56}$.	$\frac{1}{56+70}=\frac{1}{126}$.	$\frac{1}{126+126}=\frac{1}{252}$.	$\frac{1}{252+210}=\frac{1}{462}$.
Subsext.	$\frac{1}{1+6}=\frac{1}{7}$.	$\frac{1}{7+21}=\frac{1}{28}$.	$\frac{1}{28+56}=\frac{1}{84}$.	$\frac{1}{84+126}=\frac{1}{210}$.	$\frac{1}{210+252}=\frac{1}{462}$.	$\frac{1}{462+462}=\frac{1}{924}$.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

SCHOLIUM

Digitized by Google

SCHOLIUM.

Atque hic obiter incidimus in numerorum figuratorum (ut dici solent) speculationem insperatam. Sunt enim numeri omnes (tam hujus quam sequentis Tabellæ) hujusmodi additione facti, figurati; putà Laterales, Triangulares, Pyramidales, &c. Quod, cum sit cuivis obvium, monuisse sufficiat.

Patet etiam, (in utraque Tabella,) series numerorum sic inventorum transversas easdem plane esse atque erectas.

Ex dictis autem licet propositionum aliquot præcedentium summam (nempe de serie Æqualium serie radicum multata) in unam Tabellam conjicere quam sequenti propositioni subjungam. Nempe ----

PROP. CXXXII. *Theorema.*

SI exponatur infinita series Æqualium multata analoga serie Primanorum (vel si libet, subprimanorum, quod tantundem valet) Subsecundanorum, Subtertianorum, &c. Residua ipsa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. eam rationem habebunt ad congruam seriem Æqualium, quam habet Unitas ad numeros in subjecta Tabella indicatos. Nempe

Seriei

Seriei Æqualium mulctatæ serie

Nulla	Subseptimanorum	Subsecundanorū	Subtertianorum	Subquartanorum	Subquintanorum	Subsextanorum	Subseptimanorū	Suboctavanorum	Subnonanorum	Subdecimanorum	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	Æqualia
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Residua.
1	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	Quadrata.
1	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	Cubi.
1	1	5	15	35	70	126	210	330	495	715	Biquadrat.
1	1	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	Surdesol.
1	1	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	Sextana.
1	1	8	36	120	330	792	1716	3432	6435	11440	Septimana
1	1	9	45	165	495	1287	3003	6435	12870	24310	Octavana.
1	1	10	55	220	715	2002	5005	11440	24310	48620	Nonana.
1	1	11	66	286	1001	3003	8008	19448	43758	92378	Decimana.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Sequitur ex præcedente. Numerus autem Tabellæ quilibet intermedius est aggregatus ex duobus sibi proximis altero sursum altero ad dextram positis.

Digitized by Google

Notandū etiam eſt, eundem prodire rationis conſequentem in reſiduorū quadratis ſi auferantur ſubtertiana, & in Cubis ſi auferantur ſubſecundana; item in ſextanis ſiau ferantur ſubſeptimana, & in ſeptimanis ſi auferantur ſubſextana; & ſic ubique reciprocatis quaſi poteſtatibus, ut ex inſpecta tabella patet.

Sed & etiam alias idem aliquando accidit, puta in Surdeſolidis ſi auferantur ſubprimana & in ipſis Reſiduis ſi auferantur ſubquintana, ſed & in Quadratis ſi auferantur ſubſecundana; Item in Nonanis ſi auferantur ſubprimana, & in ipſis Reſiduis ſi auferantur ſubnonana, ſed & in Cubis ſi auferantur ſubſecundana, & Quadratis ſi auferantur ſubtertiana: Item in Octavanis ſi auferantur ſubſextana, & ſextanis ſi auferantur ſuboctavana, ſed & in Decimanis ſi auferantur ſubquintana, & in Quintanis ſi auferantur ſubdecimana: & ſic alibi ut ex tabella patet.

PROP. CXXXIII. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie ſecundanorum, Reſiduorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta

Reſidua	Quadrata.	Cubi.
$aD - a^2$	$a^2D^2 - 2a^3D + a^4$	$a^3D^3 - 3a^4D^2 + 3a^5D - a^6$
$bD - b^2$	$b^2D^2 - 2b^3D + b^4$	$b^3D^3 - 3b^4D^2 + 3b^5D - b^6$
$cD - c^2$	$c^2D^2 - 2c^3D + c^4$	$c^3D^3 - 3c^4D^2 + 3c^5D - c^6$
&c uſq: ad	&c uſque ad	&c uſque ad
$DD - D^2$	$D^2D^2 - 2D^3D + D^4$	$D^3D^3 - 3D^4D^2 + 3D^5D - D^6$
$\frac{1}{2}AD^2 - \frac{1}{3}AD^2$	$\frac{1}{3}AD^4 - \frac{2}{4}AD^4 + \frac{1}{5}AD^4$	$\frac{1}{4}AD^6 - \frac{3}{5}AD^6 + \frac{3}{6}AD^6 - \frac{1}{7}AD^6$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}AD^2$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{1}{30}AD^4$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5} = \frac{2}{60} = \frac{1}{30}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7} = \frac{6}{840} = \frac{1}{140}$
$\frac{1}{2\times3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2\times3}\times\frac{4}{4\times5} = \frac{1}{30}$	$\frac{1}{2\times3}\times\frac{4}{4\times5}\times\frac{9}{6\times7} = \frac{1}{140}$

Et ſic deinceps; continue multiplicando Numeratores per numeros

numeros quadratos, & denominatores per binos continue sequentes arithmetice proportionales.

PROP. CXXXIV. *Corollarium.*

IDeoq; *Si series Æqualium multiplicata serie Primanorum respective ducatur in seriem Primanorum; Rectangulorum (aut ipsis æqualium vel etiam proportionalium Quadratorum aut figurarum quarumvis) aggregatum, ad aggregatum totidem æqualium, rationem habebit cognitam.*

Atq; idem accidet si Quadrata seriei illius in Quadrata hujus; Et cubi illius in cubos hujus, &c. respective ducantur.

Nempe eædem prodibunt rationes quæ in Prop. præced. Nam si ducatur

$D-a$ in a	$Q:D-a:=D^2-2aD+D^2$ in a^2	$C:D-a:=D^3-3aD^2\times 3a^2D-a^3$ in a^3
fiet $aD-a^2$ &c.	$a^2D^2-2a^3D+a$ &c.	$a^3D^3-3a^4D^2+3a^5D-a^6$ &c.

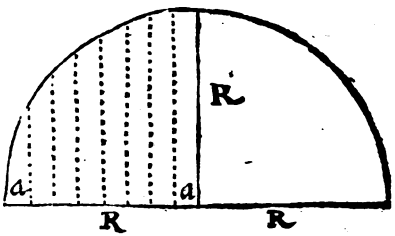
PROP. CXXXV. *Corollarium.*

IDeoq; *Semi-Circulus ad Quadratum Diametri (vel etiam Semi-Ellipsis ad Parallelogrammum Ellipsi circumscriptum) eam habet rationem quam habent Radices quadraticæ universales Resiliuorum seriei Primanorum serie Secundanorum multiplicatæ, ad seriem Primanorum illorum maximæ Æqualium, Totus itaq; circulus (aut Ellipsis) ad illud Quadratum (vel Parallelogrammum) rationem habebit illius duplam.*

Nam si diameter circuli (vel etiam ellipseos ponatur D,

Digitized by Google

(cujus pars infinite parva $\frac{D}{\infty} = a$,) eique ordinatim-applicentur infinitæ rectæ (æqualiter ab invicem distantes) semicirculum (vel semi ellipsen) complentes; erunt illæ (ut notum est) mediæ proportionales (vel saltem in ellipsi mediis illis proportionalibus proportionales) inter diametri segmenta; Puta



inter	a	$2a$	$3a$	$4a$	
&	$D-a$	$D-2a$	$D-3a$	$D-4a$	} &c.
ideoq;	$\sqrt{:aD-a^2:}$	$\sqrt{:2aD-4a^2:}$	$\sqrt{:3aD-9a^2:}$	$\sqrt{:3aD-16a^2}$	
vel	$\sqrt{:aD-a^2;}$	$\sqrt{:bD-b^2:}$	$\sqrt{:cD-c^2:}$	$\sqrt{:dD-d^2:}$	

Adeoque omnium aggregatum, hoc est semicirculus, (vel semi-ellipsis) ad totidem ipsi $\sqrt{D^2}$ æqualiū, puta ad quadratum Diametri (saltem ad diametrum in altitudinem ductum)

ut $\sqrt{:aD-a^2:} + \sqrt{:bD-b^2:} + \sqrt{:cD-e^2:} \pm$ &c. usq; ad $\sqrt{:DD-D^2}$,

ad $\sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} + \sqrt{D^2} +$ &c. $= A\sqrt{D^2} = AD$

Ideoque circulus integer ad idem quadratum, ut $2\sqrt{:aD-a^2}$ &c. ad AD.

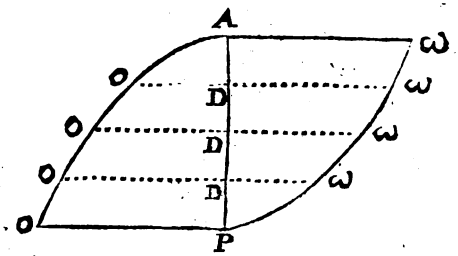
PROP. CXXXVI. *Corollarium.*

ET proinde, *Si supponamus semiparabolæ cujusvis infinitas rectas (ordinatim-applicatas) in ejusdem, inverso situ positæ, respectivas rectas duci; quod provenit solidum ex infinitis illis Rectangulis constatum (vel ex Quadratis, aut aliis quidem figuris similibus, quæ rectangulis illis æquentur) erit ad æquè-altum Parallelepipedum congruum (nempe cujus basis æquentur Quadrato basis semiparabolæ) ut Semicirculus ad Quadratum*

Digitized by Google

dratum Diametri. (Et quidem mediæ proportionales erunt in ſubduplicata ratione ordinatim-applicatarum in Circulo vel Ellipſi.)

Sit eadem parabola APO ſitu directo, & PAω ſitu inverſo poſita : erunt igitur (ex natura Parabolæ) Quadrata ordinatim-applicatarum (nempe rectarum D O, D O, &c. deſcendendo ; vel Dω, Dω, &c. aſcendendo,) infinita ſeries Primanorum ; puta a, $2a$, $3a$ &c.



vel eorum loco, a, b, c, &c. quorum maximum dicatur D (nempe quadratum baſis P O vel A ω:) Et propterea, eadem inverſo ſitu erunt $D - a$, $D - 2a$, $D - 3a$, &c. vel etiam $D - a$, $D - b$, $D - c$, &c. (Æquale enim eſt ſingulorum incrementum, ſi a minimo ordiamur, atque decrementum, ſi ordiamur a maximo.) Et conſequenter ipſæ ordinatim-applicatæ (quippe in quadratorum ſuorum ratione ſubduplicata,) illic quidem $\sqrt{a}$, $\sqrt{2a}$, $\sqrt{3a}$, &c. vel $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$, &c. hic autem $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-2a}$. $\sqrt{:D-3a}$ &c. vel (eorum loco) $\sqrt{:D-a}$. $\sqrt{:D-b}$. $\sqrt{:D-c}$ &c. Ductis igitur his in illas, emergunt rectangula O D ω. Nempe

Ductis	$\sqrt{:D-a}$.	$\sqrt{:D-b}$	$\sqrt{:D-c}$	&c.
In	$\sqrt{a}$.	$\sqrt{b}$.	$\sqrt{c}$.	&c.
Fient	$\sqrt{:aD-a^2}$.	$\sqrt{:bD-b^2}$.	$\sqrt{:cD-c^2}$.	&c.

Horum autem rectangulorum omnium aggregatum, ad rectangulum $\sqrt{:D-o}$. in $\sqrt{:D-o}$, hoc eſt $\sqrt{D^2}=D$ toties poſitum : Hoc eſt, ſolidum ex illâ multiplicatione ortum, ad dictum Parallelepipedum : eſt ut ſemicirculus ad quadratum Diametri, per præcedentem.

Et propterea etiam mediæ proportionales inter contiguas re-

ctas OD, Dω, erunt in ſubduplicata ratione ordinatim-applicatarum in circulo vel ellipſi. quippe quia rectangula ODω ſunt illis ordinatim applicatis proportionalia.

SCHOLIUM.

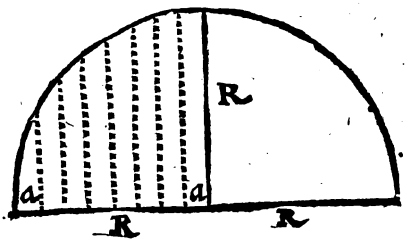
Nota tamen, non neceſſarium eſſe ut ſemi-parabola inverſo ſitu poſita ſit plane eadem cum ea quæ ponitur ſitu directo: nam res non minus ſuccedet in quibuſlibet duabus ſemiparabolis inverſo ſitu poſitis, modo æque altis. Ita tamen ut, ſi baſes habeant inæquales, baſis Parallelepipedi non ſumatur, utriuſvis Parabolarum baſis quadrato, ſed utriuſq; rectangulo æqualis, puta P O × A ω. quod monuiſſe ſufficiat, cum eadem quæ præceſſit demonſtratio, levi immutatione facta, etiam huc accommodari poſſit. Vel etiam hoc inde facile inferri poſſit.

Figura vero ex omnibus mediis proportionalibus (inter OD, Dω,) conſtans, erit quoddam Elliptoides: cujus nempe ordinatim applicatarum quadrata ſunt ipſis ordinatim applicatis in ellipſi proportionalia, ut patet. Sicut nempe in paraboloide Biquadratico ordinatim-applicatarum quadrata ſunt ordinatim applicatis in parabola proportionalia; Et quadrata ordinatim applicatarum in Parabola proportionalia ipſis in triangulo Ordinatim applicatis.

PROP. CXXXVII. *Corollarium.*

ITem, *Spheroides (vel etiam Conoides aut Pyramidoides Ellipticum,) ad Cylindrum (vel Priſma circumſcriptum,) rationem habebunt eam quam habet quadruplum ſeriei Primanorum ſerie Secundanorum multatæ, ad ſeriem totidem Æqualium maximo Primanorum.* Nempe ut 2 ad 3.

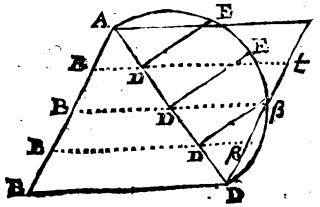
Cum



Cum enim rectæ in Circulo vel Ellipsi sint Duplum seriei $\sqrt{:}$ a D — a ^{2} : &c. Erunt plana in Conoide vel Pyramidoide ut Quadruplum ipsorum aD — a ^{2} &c. Ideoq; ad Prisma vel Cylindrum circumscriptum, ut 4 ad 6, vel 2 ad 3. Per prop. 133. Quod & antea ostensum erat prop. 123.

PROP. CXXXVIII. *Corollarium.*

ITem, *Si Parallelogrammum linea diagonali dividatur; rectæq; unius trianguli in continuas rectas alterius trianguli ducantur, mediæ proportionales erunt totidem (vel circuli, vel saltem) Ellipseos ordinatim applicatæ; earúmq; quadrata aut circuli (aut figuræ quæcunq; similes) Pyramidoidis aut conoidis Elliptici Plana.*



Sequitur ex duabus præced. Nam rectæ conterminæ sunt instar segmentorum Diametri. An autem circulus, an Ellipsis prodibit; judicandum erit eodem indicio, quo in prop. 124.

PROP. CXXXIX. *Theorema.*

SI exponatur series primanorum mulctata serie Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua

Reſidua	Quadrata.	Cubi
$aD^2 - A^2$ &c. ad $DD^2 - D^3$	$a^2D^4 - 2a^2D^2 + a^4$ &c. uſq; ad $D^2D^4 - 2D^4D^2 + D^6$	$a^3D^6 - 3a^2D^4 + 3a^2D^2 - a^3$ &c. uſq; ad $D^3D^6 - 3D^5D^4 + 3D^7D^2 - D^9$
$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}AD^2$ vel $\frac{2}{2\times4}$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7} = \frac{8}{105}AD^6$ $\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{6} + \frac{3}{8} - \frac{1}{10} = \frac{48}{240}AD^9$ $\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$

Et ſic deinceps; puta

$$\frac{2\times4\times6\times8\times10}{6\times8\times10\times12\times14\times16} \quad \frac{2\times4\times6\times8\times10\times12}{7\times9\times11\times13\times15\times17\times19} \text{ &c.}$$

PROP. CXL. *Coroll.*

Idem accidet, ſi ſeries Æqualium mulctata ſerie Secundanorum, ducatur in ſeriem Primanorum. Et illius Quadrata, Cubi, &c. in Quadrata, Cubos &c. hujus.

(Puta, ſi rectæ in ſemiparabola, diametro parallelæ, ducantur in rectas Parallelogrammi circumſcripti: nam earum continuationes, in complemento, ſunt ſeries Secundanorum.)

Quia nempe $D^2 - a^2$ in a eſt $aD^2 - a^3$. &c.

PROP. CXLI. *Theorema.*

SI exponatur ſeries Primanorum mulctata ſerie Quartanorum; Reſiduorum Quadrata, Cubi, &c. ad ſeriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Reſidua

Digitized by Google

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$aD^3 - a^4$ &c.	$a^2D^6 - 2a^5D^3 + a^8$ &c.	$a^3D^9 - 3a^6D^6 + 3a^9D^3 - a^{12}$ &c.
$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}AD^4$	$\frac{1}{3} - \frac{2}{6} + \frac{1}{9} = \frac{1}{9}AD^8$	$\frac{1}{4} - \frac{3}{7} + \frac{3}{10} - \frac{1}{12} = \frac{1}{420}AD^{12}$
vel $\frac{3}{2 \times 5}$	$\frac{3 \times 6}{3 \times 6 \times 9}$	$\frac{3 \times 6 \times 9}{4 \times 7 \times 10 \times 12}$

Et sic deinceps, puta $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12}{5 \times 8 \times 11 \times 14 \times 17}$. $\frac{3 \times 6 \times 9 \times 12 \times 15}{6 \times 9 \times 12 \times 15 \times 18 \times 21}$. &c.

PROP. CXLII. *Coroll.*

Idem continget, si series Æqualium mulctata serie Tertianorum, ducatur in seriem Primanorum.

(Puta, si rectæ paraboloidis Cubicalis diametro Parallelæ, ducantur in rectas Trianguli inscripti: Nam earum continuationes in complemento, sunt series Tertianorum. Et similiter mutatis mutandis, in aliis propositionibus.)

Quia nempe $D^3 - a^3$ in a, est $aD^3 - a4$.

SCHOLIUM.

Et pariter judicandum erit, mutatis mutandis, in aliis quibusvis casibus, ubi series hujusmodi componitur ex duabus vel pluribus aliis seriebus invicem multiplicatis. ut patet.

PROP. CXLIII. *Theorema.*

PAriter, si exponatur series Primanorum mulctata serie Quintanorum, Sextanorum, &c. Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

Puta	$\frac{4}{2 \times 6}$.	$\frac{4 \times 8}{3 \times 7 \times 11}$.	$\frac{4 \times 8 \times 12}{4 \times 8 \times 12 \times 16}$.	$\frac{4 \times 8 \times 12 \times 16}{5 \times 9 \times 13 \times 17 \times 21}$	&c.
Item	$\frac{5}{2 \times 7}$	$\frac{5 \times 10}{3 \times 8 \times 13}$	$\frac{5 \times 10 \times 15}{4 \times 9 \times 14 \times 19}$	$\frac{5 \times 10 \times 15 \times 20}{5 \times 10 \times 15 \times 20 \times 25}$	&c.

Digitized by Google

Et sic deinceps, ut potestas seriei ablatæ postulaverit: Prout inductione patebit. Ideoq; ----

PROP. CXLIV. *Theorema.*

SI exponatur series Primanorum mulctata serie Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. Residua ipsa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella: Sive, quam habent numeri Tabellæ, ad Unitatem. Nempe

Seriei Primanorum mulctatæ serie

	Residua	Quadrata	Cubi	Biquadrata
Secundan.	$\frac{1}{2\times3}$	$\frac{1\times2}{3\times4\times5}$	$\frac{1\times2\times3}{4\times5\times6\times7}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{5\times6\times7\times8\times9}$
Tertianor.	$\frac{2}{2\times4}$	$\frac{2\times4}{3\times5\times7}$	$\frac{2\times4\times6}{4\times6\times8\times10}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$
Quartan.	$\frac{3}{2\times5}$	$\frac{3\times6}{3\times6\times9}$	$\frac{3\times6\times9}{4\times7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{5\times8\times11\times14\times17}$
Quintan.	$\frac{4}{2\times6}$	$\frac{4\times8}{3\times7\times11}$	$\frac{4\times8\times12}{4\times8\times12\times16}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{5\times9\times13\times17\times21}$
Sextanor.	$\frac{5}{2\times7}$	$\frac{5\times10}{3\times8\times13}$	$\frac{5\times10\times15}{4\times9\times14\times19}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{5\times10\times15\times20\times25}$
Septiman.	$\frac{6}{2\times8}$	$\frac{6\times12}{3\times9\times15}$	$\frac{6\times12\times18}{4\times10\times16\times22}$	$\frac{6\times12\times18\times24}{5\times11\times17\times23\times29}$
Octavan.	$\frac{7}{2\times9}$	$\frac{7\times14}{3\times10\times17}$	$\frac{7\times14\times21}{3\times11\times18\times25}$	$\frac{7\times14\times21\times28}{5\times12\times19\times26\times33}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CXLV. *Theorema.*

Similiter, si exponatur series Secundanorum multata serie Tertianorum, Quartanorum, Quintanorum, &c; Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Serie Secundanorum multatæ serie	Residua	Quadrata.	Cubi	Biquadrata.
Tertian.	1	1 × 2	1 × 2 × 3	1 × 2 × 3 × 4
	3 × 4	5 × 6 × 7	7 × 8 × 9 × 10	9 × 10 × 11 × 12 × 13
Quart.	2	2 × 4	2 × 4 × 6	2 × 4 × 6 × 8
	3 × 5	5 × 7 × 9	7 × 9 × 11 × 13	9 × 11 × 13 × 15 × 17
Quintan.	3	3 × 6	3 × 6 × 9	3 × 6 × 9 × 12
	3 × 6	5 × 8 × 11	7 × 10 × 13 × 16	9 × 12 × 15 × 18 × 21
Sextan.	4	4 × 8	4 × 8 × 12	4 × 8 × 12 × 16
	3 × 7	5 × 9 × 13	7 × 11 × 15 × 19	9 × 13 × 17 × 21 × 25
Septim.	5	5 × 10	5 × 10 × 15	5 × 10 × 15 × 20
	3 × 8	5 × 10 × 15	7 × 12 × 17 × 22	9 × 14 × 19 × 24 × 29
Octav.	6	6 × 12	6 × 12 × 18	6 × 12 × 18 × 24
	3 × 9	5 × 11 × 17	7 × 13 × 19 × 25	9 × 15 × 21 × 27 × 33

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CXLVI. *Theorema.*

Item, Si exponatur series Tertianorum multata serie Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c.

Digitized by Google

Reſidua ipſa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad ſeriem Æqualium, eam quam indicat ſubjecta Tabella. Nempe

Ratio quam habent ad ſeriem Æqualium

Seriei Tertianorum multatæ ſerie

	Reſ	Quadr.	Cubi.	Biquadrata.
Quartanorum	$\frac{1}{4\times5}$	$\frac{1\times2}{7\times8\times9}$	$\frac{1\times2\times3}{10\times11\times12\times13}$	$\frac{1\times2\times3\times4}{13\times14\times15\times16\times17}$
quintanorum	$\frac{2}{4\times6}$	$\frac{2\times4}{7\times9\times11}$	$\frac{2\times4\times6}{10\times12\times14\times16}$	$\frac{2\times4\times6\times8}{13\times15\times17\times19\times21}$
Sextanorum	$\frac{3}{4\times7}$	$\frac{3\times6}{7\times10\times13}$	$\frac{3\times6\times9}{10\times13\times16\times19}$	$\frac{3\times6\times9\times12}{13\times16\times19\times22\times25}$
Septimanorũ	$\frac{4}{4\times8}$	$\frac{4\times8}{7\times11\times15}$	$\frac{4\times8\times12}{10\times14\times18\times22}$	$\frac{4\times8\times12\times16}{13\times17\times21\times25\times29}$
Octavanorum	$\frac{5}{4\times9}$	$\frac{5\times10}{7\times12\times17}$	$\frac{5\times10\times15}{10\times15\times20\times25}$	$\frac{5\times10\times15\times20}{13\times18\times23\times28\times33}$

Et ſic deinceps.

Et ſic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Atque eodem modo facile erit vel has Tabellas quouſq; libet continuare, vel alias etiam pro ſeriebus ſequentibus componere; puta Seriebus Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, &c. multatis ſeriebus quibuſlibet ſuperioris poteſtatis.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CXLVII. *Theorema.*

SI exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Primanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium rationem habebunt cognitam.

Nempe eam quæ exhibetur prop. 153. Puta

Residua.	Quadrata	Cubi.
$\sqrt{aD} - \sqrt{a^2}$ &c. ad $\sqrt{DD} - \sqrt{D^2}$	$\sqrt{a^2D^2} - 2\sqrt{a^3D} + \sqrt{a^4}$ &c. usq; ad $\sqrt{D^2D^2} - 2\sqrt{D^3D} + \sqrt{D^4}$	$\sqrt{a^3D^3} - 3\sqrt{a^4D^2} + 3\sqrt{a^5D} - \sqrt{a^6}$ &c. usq; ad $\sqrt{D^3D^3} - 3\sqrt{D^4D^2} + 3\sqrt{D^5D} - \sqrt{D^6}$
$\frac{2}{2}A\sqrt{D^2} \cdot \frac{2}{4}A\sqrt{D^2}$	$\frac{2}{4}A\sqrt{D^4} - \frac{4}{5}A\sqrt{D^4} + \frac{2}{6}AD^2$	$\frac{2}{5}AD^3 - \frac{6}{6}AD^3 + \frac{6}{7}AD^3 - \frac{2}{8}AD^3$
$\frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{5} + \frac{2}{6} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{6} + \frac{6}{7} - \frac{2}{8} = \frac{12}{1680} = \frac{1}{140}$
$\frac{2}{3 \times 4} = \frac{1}{2 \times 3}$	$\frac{2 \times 2}{4 \times 5 \times 6} = \frac{1 \times 2}{3 \times 4 \times 5}$	$\frac{\times \times 3}{5 \times 6 \times 7 \times 8} = \frac{1 \times 2 \times 3}{4 \times 5 \times 6 \times 7}$

PROP. CXLVIII. *Corollar.*

IDem continget si series Æqualium mulctata serie Subsecundanorum, ducatur in seriem Subsecundanorum.

(Puta si ordinatim applicatæ in semi-parabola ducantur in earundem continuationes in ipsius complemento.) Nam $\sqrt{D} - \sqrt{a}$ in $\sqrt{a}$ facit $\sqrt{aD} - \sqrt{a^2} = \sqrt{aD} - a$. &c. Et facta ab eorum quadratis, æquantur quadratis horum &c.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CXLIX. *Corollarium.*

Patet etiam; Eadem provenire rationes, sive exponatur series $a - a^2$ &c., *sive series* $\sqrt{a} - \sqrt{a^2}$ &c. (*vel* $\sqrt{a} - a$:)

Nempe, collatis Prop. 133. & 146.

SCHOLIUM.

Ideoque & reliqua quæ post Prop. 133 habentur Corollaria, huc etiam (mutatis mutandis) non difficulter transferri possent. quod monuisse sufficiat.

PROP. CL. *Theorema.*

Si exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Radicum quadraticarum Tertianorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{a}\,D^2 - \sqrt{a^3}$ &c.	$\sqrt{a^2}\,D^4 - 2\sqrt{a^4}\,D^2 + \sqrt{a^6}$ &c.	$\sqrt{a^3}\,D^6 - 3\sqrt{a^5}\,D^4 + 3\sqrt{a^7}\,D^2 - \sqrt{a^9}$ &c.
$\frac{2}{4} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}$	$\frac{2}{4} - \frac{4}{6} + \frac{2}{8} = \frac{16}{192} = \frac{1}{12}$	$\frac{2}{4} - \frac{6}{7} + \frac{6}{9} - \frac{2}{11} = \frac{256}{3465}$
$\frac{4}{3\times 5}\,A\sqrt{D^1}$	$\frac{4\times 4}{4\times 6\times 8}\,A\sqrt{D^4}$	$\frac{4\times 4\times 6}{5\times 7\times 9\times 11}\,A\sqrt{D^2}$

PROP. CLI. *Coroll.*

Idem continget, si series Æqualium mulctata serie Primanorum, ducatur in seriem Subsecundanorum.

Quia $D - a$ vel $\sqrt{D^2 - a^2}$ in $\sqrt{a}$, facit $D\sqrt{a} - a\sqrt{a}$, vel $\sqrt{a}\,D^2 - \sqrt{a^3}$.

SCHOLIUM.

Et similiter etiam alibi intelligendum est, ubi series exposita dividi possit, in duas vel plures componentes.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CLII. *Theorema.*

SI exponatur series Subsecundanorum mu lctata serie Secundanorum; Residuorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Residua.	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt{aD^3} - \sqrt{a^4}$ &c.	$\sqrt{a^2D^6} - 2\sqrt{a^4D^3} + \sqrt{a^8}$ &c.	$\sqrt{a^3D^9} - 3\sqrt{a^6D^6} + 3\sqrt{a^9D^3} - \sqrt{a^{12}}$ &c.
$\frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$	$\frac{2}{6} - \frac{4}{7} + \frac{2}{10} = \frac{36}{280} = \frac{9}{70}$	$\frac{2}{5} - \frac{6}{11} + \frac{6}{154} - \frac{2}{140} = \frac{132}{15400} = \frac{11}{1400}$
$\frac{6}{3 \times 6}$	$\frac{6 \times 6}{4 \times 7 \times 10}$	$\frac{6 \times 6 \times 9}{5 \times 8 \times 11 \times 14}$

Et sic deinceps. Et similiter in subductione seriei cujusvis potestatis superioris. Adeoq; ----

PROP. CLIII. *Theorema.*

SI exponatur series Subsecundanorum mulctata serie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum quadraticarum Tertianorum, Quintanorum, &c. Residua ipsa, eorúmq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio

Ratio quam habent ad seriem Æqualium

Seriei Subsecundanorum multatæ serie

	Residua	Quadrata	Cubi	Biquadrata
Primanor.	$\frac{2}{3\times4}$	$\frac{2\times2}{4\times5\times6}$	$\frac{2\times2\times3}{5\times6\times7\times8}$	$\frac{2\times2\times3\times4}{6\times7\times8\times9\times10}$
√Tertian.	$\frac{4}{3\times5}$	$\frac{4\times4}{4\times6\times8}$	$\frac{4\times4\times6}{5\times7\times9\times11}$	$\frac{4\times4\times6\times8}{6\times8\times10\times12\times14}$
Secundan.	$\frac{6}{3\times6}$	$\frac{6\times6}{4\times7\times10}$	$\frac{6\times6\times9}{5\times8\times11\times14}$	$\frac{6\times6\times9\times12}{6\times9\times12\times15\times18}$
√Quintan.	$\frac{8}{3\times7}$	$\frac{8\times8}{4\times8\times12}$	$\frac{8\times8\times12}{5\times9\times13\times17}$	$\frac{8\times8\times12\times16}{6\times10\times14\times18\times22}$
Tertianor.	$\frac{10}{3\times8}$	$\frac{10\times10}{4\times9\times14}$	$\frac{10\times10\times15}{5\times10\times15\times20}$	$\frac{10\times10\times15\times20}{6\times11\times16\times21\times26}$
√Septim.	$\frac{12}{3\times9}$	$\frac{12\times12}{4\times10\times16}$	$\frac{12\times12\times18}{5\times11\times17\times23}$	$\frac{12\times12\times18\times24}{6\times12\times18\times24\times30}$
Quartan.	$\frac{14}{3\times10}$	$\frac{14\times14}{4\times11\times18}$	$\frac{14\times14\times21}{5\times12\times19\times26}$	$\frac{14\times14\times21\times28}{6\times13\times20\times27\times34}$

Et sic deinceps.

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

PROP. CLIV. *Theorema.*

PAriter, Si exponatur series Subtertianorum multata serie Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, &c. vel Radicum cubicarum Secundanorum, Quartanorum, Quintanorum, Septimanorum, &c. Residua ipsa, eorumq; Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. rationem habebunt, ad seriem Æqualium, eam quam indicat subjecta Tabella. Nempe

Ratio

Digitized by Google

Ratio quam habent ad seriem Æqualium.

Et sic deinceps.

Seriei Subtertianorum multatæ serie

	Residua	Quadr.	Cubi	Biquadrata
√c. Secun.	$\frac{3}{4\times5}$	$\frac{3\times2}{5\times6\times7}$	$\frac{3\times2\times3}{6\times7\times8\times9}$	$\frac{3\times2\times3\times4}{7\times8\times9\times10\times11}$
Primanor.	$\frac{6}{4\times6}$	$\frac{6\times4}{5\times7\times9}$	$\frac{6\times4\times6}{6\times8\times10\times12}$	$\frac{6\times4\times6\times8}{7\times9\times11\times13\times15}$
√c. Quart.	$\frac{9}{4\times7}$	$\frac{9\times6}{5\times8\times11}$	$\frac{9\times6\times9}{6\times9\times12\times15}$	$\frac{9\times6\times9\times12}{7\times10\times13\times16\times19}$
√c. Quint.	$\frac{12}{4\times8}$	$\frac{12\times8}{5\times9\times13}$	$\frac{12\times8\times12}{6\times10\times14\times18}$	$\frac{12\times8\times12\times16}{7\times11\times15\times19\times23}$
Secundan.	$\frac{15}{4\times9}$	$\frac{15\times10}{5\times10\times15}$	$\frac{15\times10\times15}{6\times11\times16\times21}$	$\frac{15\times10\times15\times20}{7\times12\times17\times22\times27}$
√c. Septi.	$\frac{18}{4\times10}$	$\frac{18\times12}{5\times11\times17}$	$\frac{18\times12\times18}{6\times12\times18\times24}$	$\frac{18\times12\times18\times24}{7\times13\times19\times25\times31}$
√c. Octav.	$\frac{21}{4\times11}$	$\frac{21\times14}{5\times12\times19}$	$\frac{21\times14\times21}{6\times13\times20\times27}$	$\frac{21\times14\times21\times28}{7\times14\times21\times28\times35}$
Tertianor.	$\frac{24}{4\times12}$	$\frac{24\times16}{5\times13\times21}$	$\frac{24\times16\times24}{6\times14\times22\times30}$	$\frac{24\times16\times24\times32}{7\times15\times23\times31\times39}$

Et sic deinceps, ut inductione patebit.

SCHOLIUM.

Et simili methodo non erit difficile & has Tabellas quousq; libet & continuare & alias etiam pro seriebus aliis componere; puta seriebus subquartanorum, subquintanorum, &c. (aut quidem radicum quadraticarum subtertianorum, subquintanorum, &c. vel radicum cubicarum subsecundanorum, subquartanorum &c. aut aliarum similium,) multatis seriebus quibuslibet superioris potestatis.

Digitized by Google

Sed & facile est has Tabellas (aliasque similiter condendas) interpolare, saltem quoad altitudinem, interponendo series transversas quotlibet, ut ex ipsa Tabellarum progressione rite considerata patebit.

Verbi gratia, in Tabella Prop. 144. Si series primanorum multetur serie Radicum quadraticarum quintanorum, interponenda erit huic ablationi conveniens series alia transversa inter primam & secundam istius Tabellæ (quia nempe Radices quadraticæ Quintanorum, quarum index est $\frac{1}{4}$, vel $2\frac{1}{4}$, medium locum habent inter secundana & tertiana, quorum indices 2 & 3;) eritque series illa.

	Residua.	Quad.	Cubi.	Biquad
	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} \times 3$	$1\frac{1}{2} \times 3 \times 4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2} \times 3 \times 4\frac{1}{2} \times 6$
	$2 \times 3\frac{1}{2}$	$3 \times 4\frac{1}{2} \times 6$	$4 \times 5\frac{1}{2} \times 7 \times 8\frac{1}{2}$	$5 \times 6\frac{1}{2} \times 8 \times 9\frac{1}{2} \times 11$
	3	3×6	$3 \times 6 \times 9$	$3 \times 6 \times 9 \times 12$
vel.	2×7	$3 \times 9 \times 12$	$4 \times 11 \times 14 \times 17$	$5 \times 13 \times 16 \times 19 \times 22$
	6	6×6	$6 \times 6 \times 9$	$6 \times 6 \times 9 \times 12$
vel.	4×7	$6 \times 9 \times 12$	$8 \times 11 \times 14 \times 17$	$10 \times 13 \times 16 \times 19 \times 22$

Atque idem etiam in aliis Tabellis præstare non erit difficile, si processum cujusvis Tabellæ attendatur.

At quo pacto licebit easdem Tabellas interpolare quoad latitudinem, seriebus scilicet erectis alias interponendo; (puta radicum universalium Residuorum, Radicum quadraticarum Cuborum, &c. vel Radicum cubicarum Residuorum, quadratorum, Biquadratorum, &c. vel similium;) non adeo facilis est labor, si quidem possibilis. Illud autem deinceps, quoad potero, conabor, & quidem aliquousque præstabo, licet illud universaliter efficere vix spondere ausim.

Interim de seriebus auctis aliqua dicenda sunt, ne videar eas penitus omittere; sed breviter, ne sim tædio.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CLV. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Primanorum; Aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem totidem eorum maximo Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Seriei	Quadrata.	Cubi.
$R+a$ &c. ad $R+R$	$R^2+2aR+a^2$ &c. usq; ad $R^2+2RR+R^2$	$R^3+3aR^2+3a^2R+a^3$ &c. usq; ad $R^3\ 3RR^2+3R^2R+R^3$
$AR+\frac{1}{2}AR$ $1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}$	$AR^2+\frac{2}{2}AR^2+\frac{1}{3}AR^2$ $1+\frac{2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{7}{6}$	$AR^3+\frac{3}{2}AR^3+\frac{3}{3}AR^3+\frac{1}{4}AR$ $1+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{1}{4}=\frac{15}{4}$

Ubi numerator quilibet conflat ex præcedentis duplo unitate aucto: Denominator ex præcedente unitate aucto.

PROP. CLVI. *Corollarium.*

IDeoq; *si Trapezio (ex Parallelogrammo & Triangulo, æqualium basium & altitudinum, conflato) aptetur Conoides (vel Pyramidoides) truncatum (sive conversione circa axem, sive aliàs;) erit illud ad Cylindrum vel Prisma inscriptum, ut* $\frac{7}{6}$ *ad* 1, *vel, ut* 7 *ad* 3:

Nempe ut quadrata seriei Æqualium serie Primanorum auctæ, ad seriem Æqualium.

Sin Parrallelogrammi & Trianguli basis sint inæquales moderamen adhibendum est.

PROP. CLVII. *Corollarium.*

SI autem *Conoides vel Pyramidoides illud Cylindricè vel Prismaticè excavetur; residuum erit (ad exem-*

Digitized by Google

tum Cylindrum vel Prisma maximum inscriptum) ut 4 ad 3.

Nempe ut $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{4}{1}$ ad 1.

PROP. CLVIII. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Secundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta, si Parallelogrammum complemento Semiparabolæ augeatur.)

Nempe, pro quovis termino seriei primanorum posito a (ad abbreviandam operationem) & propterea pro quovis termino secundanorum a^2, &c. Erunt

Aggregata $R^2 + a^2$ &c.	Quadrata. $R^4 + 2a^2R + a^4$ &c.	Cubi. $R^6 + 3a^2R^4 + 3a^4R^2 + a^6$ &c.
$1AR^2 + \frac{1}{3}AR^2$ $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$	$1AR^4 + \frac{2}{3}AR^4 + \frac{1}{5}AR^4$ $1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{28}{15}$	$1AR^6 + \frac{3}{3}AR^6 + \frac{3}{5}AR^6 + \frac{1}{7}AR^6$ $1 + \frac{3}{3} + \frac{3}{5} + \frac{1}{7} = \frac{288}{105}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si series Æqualium augeatur serie Tertianorum, Quartanorum, &c. Ut patet.

PROP. CLIX. *Theorema.*

SI exponatur series Æqualium aucta serie Subsecundanorum; aggregatorum Quadrata, Cubi, Biquadrata, &c. ad seriem illam Æqualium, rationem habebunt cognitam. (Puta si Parallelogrammum augeatur semiparabolâ.) Nempe

Aggregata

Aggregata	Quadrata	Cubi
$\sqrt{R}+\sqrt{a}$ &c.	$\sqrt{R^2}+2\sqrt{aR}+\sqrt{a^2}$ &c.	$\sqrt{R^3}+3\sqrt{aR^2}+3\sqrt{a^2R}+\sqrt{a^3}$ &c.
$A\sqrt{R}+\frac{2}{3}A\sqrt{R}$	$A\sqrt{R^2}+\frac{4}{3}A\sqrt{R^2}+\frac{2}{4}A\sqrt{R^2}$	$A\sqrt{R^3}+\frac{6}{3}A\sqrt{R^3}+\frac{6}{4}A\sqrt{R^3}+\frac{2}{5}A\sqrt{R^3}$
$\frac{2}{2}+\frac{2}{3}=\frac{10}{6}=\frac{3}{2}$	$\frac{2}{2}+\frac{4}{3}+\frac{2}{4}=\frac{68}{24}=\frac{17}{6}$	$\frac{2}{2}+\frac{6}{3}+\frac{6}{4}+\frac{2}{5}=\frac{228}{120}=\frac{42}{20}$

PROP. CLX. *Theorema.*

SI series Æqualium augeatur serie Subtertianorum; Aggregata, eorúmq; Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam.

(Puta, si Parallelogrammum augeatur semiparaboloide Cubicali,) Nempe.

Aggregata	Quadrata.	Cubi.
$\sqrt[3]{R}+\sqrt[3]{a}$ &c.	$\sqrt[3]{R^2}+2\sqrt[3]{aR}+\sqrt[3]{a^2}$ &c.	$\sqrt[3]{R^3}+3\sqrt[3]{aR^2}+3\sqrt[3]{a^2R}+\sqrt[3]{a^3}$ &c.
$1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$	$1+\frac{6}{4}+\frac{3}{5}=\frac{31}{10}$	$1+\frac{9}{4}+\frac{9}{5}+\frac{3}{6}=\frac{111}{20}$

SCHOLIUM.

Et pari modo procedendum erit, si exponatur series Æqualium aucta serie subquartanorum, subquintanorum, &c. vel etiam serie radicum-quadraticarum Cuborum, Surdesolidorum, &c. vel radicum cubicarum Secundanorum, Quartanorum, &c. Et pariter in aliis.

PROP. CLXI. *Theorema.*

PAriter, si series Primanorum augeatur serie Secundanorum; Aggregata, eorúmq; Quadrata, Cubi, &c. ad seriem Æqualium, rationem habebunt cognitam. Nempe

Aggregata	Quadrata.	Cubi.
$aR+a^2$ &c.	$a^2R^2+2a^3R+a^4$ &c.	$a^3R^3+3a^4R^2+3a^5R+a^6$ &c.
$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}AR^2$	$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{1}{5}=\frac{11}{20}AR^4$	$\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{3}{6}+\frac{1}{7}=\frac{202}{840}AR^6$

SCHOL.

Digitized by Google

SCHOLIUM.

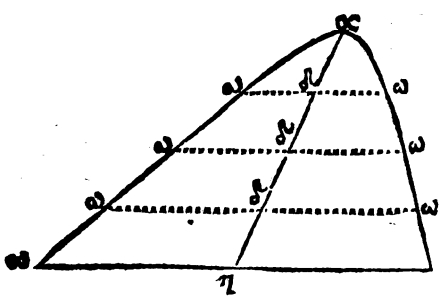
Et pari modo procedendum erit, si exponatur series primanorum (vel etiam Secundanorum, Tertianorum, &c.) aucta serie quâlibet alia, ut non sit opus hisce diutius immorari.

PROP. CLXII. *Corollarium.*

IDeoq; , *Conoides vel Pyramidoides Hyperbolicum, ad semissem Cylindri vel Prismatis circumscripti, est ut* 5 *ad* 6: *ad totum vero, ut* 5 *ad* 12.

Intellige, si tam transversa diameter, quam diameter intercepta maxima, ponatur æqualis lateri recto: secus enim adhibenda erit moderatio.

Nam, si ponatur Hyperbolæ latus rectum l vel R, transversa diameter $t = l$, & diameter intercepta d, erunt quadrata ordinatim-applicatarum $dl + \frac{d}{t}dl$ (per prop. 33. Con. Sect.) vel (propter $t = l$) $dl + d^2$. Et propterea (cum sit l vel R, certa quantitas, & d mutabilis & quidem altitudini proportionalis, pro qua igitur substitui potest a, b, c, &c.) erunt omnium quadrata (adeoq; & plana Conoidis vel Pyramidoidis) series infinita Primanorum aucta serie Secundanorum; puta $aR + a^2$, $bR + b^2$, $cR + c^2$, &c. usq; ad $R^2 + R^2$. Adeoq; series illa ad semissem seriei totidem maximo ($R^2 + R^2 = 2R^2$) æqualium (puta ad AR^2) erit ut 5 ad 6, per præced. Et propterea ad integram illam seriem æqualium, ut 5 ad 12. Quod erat propositum.



SCHOL.

Digitized by Google

SCHOLIUM.

Idem tamen eveniet, si saltem sumatur Diameter-intercepta maxima æqualis Diametro-Transversæ. Ut colligi poterit ex propositione sequente.

PROP. CLXIII. *Corollarium.*

SI autem non adsit limitatio prop. præced. Erit ratio Conoidis vel Pyramidoidis ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, utut non eadem quæ illic innuitur, cognita tamen.

Cum enim, utcunq;, quadratum ordinatim-applicatæ in Hyperbola sit $dl + \frac{dd}{t} l$, vel $dL + \frac{dd}{T} L$, vel $\frac{dT+dd}{T} L$, si pro diametris interceptis, d, d, &c. ponantur successive a, b, c, &c. sitq; omnium maxima D, adeoq; quadratum ordinatim-applicatæ maximæ $\frac{DT+DD}{T} L$. Erunt omnia $aT + bT + cT$ (&c. usq; ad DT) $= \frac{1}{2} ADT$; & omnia $a^2 + b^2 + c^2$ (&c. ad D^2) $= \frac{1}{3} AD^2$; quorum aggregatum $\frac{1}{2} ADT + \frac{1}{3} AD^2$ si ducatur in L, & factum illud dividatur per T; prodibit $\frac{\frac{1}{2}ADT + \frac{1}{3}AD^2}{T} L$, vel etiam $\frac{\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}D}{T} ADL$: vel deniq; $\frac{3T+2D}{6T} ADL$: Quam autem habet rationem $\frac{3T+2D}{6T} ADL$, aggregatum quadratorum omnium ordinatim-applicatarum; ad $\frac{DT+D^2}{T} AL$ vel $\frac{T+D}{T} ADL$, aggregatum totidem Quadrato maximæ æqualium: eam habet Conoides vel Pyramidoides illud, ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum, (propter plana quadratis illis proportionalia;) nempe, ut $\frac{3T+2D}{6T}$, ad $\frac{T+D}{T}$, vel, ut $3T + 2D$ ad $6T + 6D$. vel, ut $\frac{1}{2}T + \frac{1}{3}D$ ad $T + D$. Adeoq; ----

PROP.

PROP. CLXIV. *Coroll.*

UT semissis Diametri Transversæ auctus triente Diametri Interceptæ, ad Transversæ & Interceptæ aggregatum; seu, ut Triplum Transversæ simul cum Duplo Interceptæ, ad simul utriusq; sextuplum: sic est Conoides vel Pyramidoides Hyperbolicum, ad Cylindrum vel Prisma (super eadem basi) circumscriptum.

Patet ex præcedente.

PROP. CLXV. *Corollarium.*

ITem, *Hyperbola ad Parallelogrammum circumscriptum, est ut Series Radicum universalium seriei Primanorum serie Secundanorum respectivè auctæ, ad seriem totidem Radicum maximæ æqualium.*

Nempe si adsit limitatio prop. 162, ut $\sqrt{:}\ aR+a^2 :+\sqrt{:}\ bR+b^2 :+\sqrt{:}\ cR+c^2$: &c. (usq; ad $\sqrt{:}\ R^2+R^2:$) ad $A\sqrt{:}\ R^2+R^2:: = A\sqrt{2}R^2 = AR\sqrt{2}$. Hoc est, ut omnes ordinatim-applicatæ ad maximam toties positam.

Si verò illa limitatio non adsit; saltem erit ut $\sqrt{:}\ \frac{aT+a^2}{T}$ L: $+\sqrt{:}\ \frac{bT+b^2}{T}$ L: $+\sqrt{:}\ \frac{cT+c^2}{T}$ L: &c. (usq; ad $\sqrt{:}\ \frac{DT+D^2}{T}$ L:) ad $A\sqrt{:}\ \frac{DT+D^2}{T}$ L: Hoc est, (dividendo omnia per $\sqrt{L}$ & multiplicando in $\sqrt{T}$) ut $\sqrt{:}\ aT+a^2 :+\sqrt{:}\ bT+b^2 :\sqrt{:}\ cT+c^2$ &c. (usq; ad $\sqrt{:}\ DT+D^2:$) ad $A\sqrt{:}\ DT+D^2:$ ut patet ex demonstratione prop. 163.

SCHOLIUM.

At quo pacto tandem ratio aggregati radicum illarum universalium, ad aggregatum totidem maximæ æqualium, numeris explicari poterit, non ita facile ostendetur.

Adeoq; & hic incidimus in eandem difficultatem in quadratura Hyperbolæ, quam supra aliquoties meminimus de quadratura

Digitized by Google

dratura Circuli vel Ellipſeos, (aliarumq; aliquot curvarum:) nempe ut inquiratur jam ratio quam habet infinita ſeries Radicum univerſalium Binomiorum, ſicut illic Apotomarum.

Et quidem aliquando proclivis eram ut crederem rem planè impoſſibilem eſſe ut Radices ſurdæ numero infinitæ & invicem incommenſurabiles ita in unum aggregatum coire poſſint ut illud, ad expoſitam aliquam quantitatem rationalem, rationem habent explicabilem.

Atq; hoc quidem eo magis adhuc confirmatum eſſe videbatur, quoniam ejuſmodi ſeries finita ad ſeriem totidem maximæ æqualium vix aliam paſſa eſt rationis explicationē quam omnes ſigillatim repetendo, raro enim duæ vel plures occurrunt commenſurabiles quæ in unam additione colligi poſſint.

Verbi gratia, ſi ponatur circuli radius partium 6 ſinus recti in Quadrante ſingulis partium iſtarum terminis inſiſtentes, erunt, $\sqrt{:36-0:}+\sqrt{:36-1:}+\sqrt{:36-4:}+\sqrt{:36-9:}+\sqrt{:36-16:}+\sqrt{:36-25:}+\sqrt{:36-36:}$ (per ea quæ dicta ſunt ad pr. 121.) vel quod eodem recidit, $\sqrt{36}+\sqrt{35}+\sqrt{32}+\sqrt{27}+\sqrt{20}+\sqrt{11}+0$; vel, ut irrationalitas ad minimos terminos reducatur, $6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0$: Ratio igitur quam habet illud radicum aggregatum ad radicem maximam toties poſitam, puta $7\sqrt{:36-0:}$ vel 7×6 hoc eſt 42; non explicatius efferri poteſt quam $\frac{6+\sqrt{35}+4\sqrt{2}+3\sqrt{3}+2\sqrt{5}+\sqrt{11}+0}{42}$.

Atq; ea eſt ratio quam habent illi ſinus recti in Quadrante ad totidem rectas radio æquales & parallelas in Quadrato circumſcripto.

Pariter, ſi ponatur radius partium 10; erunt ſinus recti $\sqrt{:100-0:}+\sqrt{:100-1:}+\sqrt{:100-4:}+\sqrt{:100-9:}+\sqrt{:100-16:}+\sqrt{:100-25:}+\sqrt{:100-36:}+\sqrt{:100-49:}+\sqrt{:100-64:}+\sqrt{:100-81:}+\sqrt{:100-100:}$: Hoc eſt $\sqrt{100}+\sqrt{99}+\sqrt{96}+\sqrt{91}+\sqrt{84}+\sqrt{75}+\sqrt{64}+\sqrt{51}+\sqrt{36}+\sqrt{19}+\sqrt{0}$. Vel etiam $10+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+8+\sqrt{51}+6+\sqrt{19}+0$. quod aggregatum non aliter abbreviari poteſt quam pro $10+8+6+0$ ſuſtinendo 24; ut ratio iſtius aggregati ad radicem maximam toties poſitam, puta ad $11\sqrt{100}$ vel 11×10 vel 110, non explicatius efferri poteſt quam $\frac{24+3\sqrt{11}+4\sqrt{6}+\sqrt{91}+2\sqrt{21}+5\sqrt{3}+\sqrt{51}+\sqrt{19}}{110}$;

Digitized by Google

quæ minus adhuc videtur intelligibilis quam ubi ponitur radius partium pauciorum, puta 6.

Atq; eodem modo quo plures ſupponuntur radii partes eò intricatior neceſſe eſt ut fiat rationis explicatio; quæ quidem fere omnium radicum repetitionem poſtulet, cum paucæ admodum, raro quidem, & non niſi fortuitò quaſi, occurrunt, quæ vel rationales ſint vel quidem invicem commenſurabiles. Et propterea ſi ſupponatur Radius partium infinitarum, ratio proveniens etiam minus adhuc videatur explicabilis.

Idem contingeret, ſi, juxta tenorem prop. 135. ponatur circuli Diameter partium 12. Ita enim eſſent Sinus recti correſpondentes in Semicirculo, $\sqrt{:}0\times12-0:+\sqrt{:}1\times12-1:+\sqrt{:}2\times12-4:+\sqrt{:}3\times12-9:+\sqrt{:}4\times12-16:+\sqrt{:}5\times12-25:+\sqrt{:}6\times12-36:+\sqrt{:}7\times12-49:+\sqrt{:}8\times12-64:+\sqrt{:}9\times12-81:+\sqrt{:}10\times12-100:+\sqrt{:}11\times12-121:+\sqrt{:}12\times12-144$. Hoc eſt $\sqrt{:}0-0:+\sqrt{:}12-1:+\sqrt{:}24-4:+\sqrt{:}36-9:+\sqrt{:}48-16:+\sqrt{:}60-25:+\sqrt{:}72-36:+\sqrt{:}84-49:+\sqrt{:}96-64:+\sqrt{:}108-81:+\sqrt{:}120-100:+\sqrt{:}132-121:+\sqrt{:}144-144$. Hoc eſt $\sqrt{0}+\sqrt{11}+\sqrt{20}+\sqrt{27}+\sqrt{32}+\sqrt{35}+\sqrt{36}+\sqrt{35}+\sqrt{32}+\sqrt{27}+\sqrt{20}+\sqrt{11}+\sqrt{0}$. Vel propter eaſdem radices bis poſitas, $2\sqrt{0}+2\sqrt{11}+2\sqrt{20}+2\sqrt{27}+2\sqrt{32}+2\sqrt{35}+\sqrt{36}$ Vel, reducendo irrationalitatem ad minimos terminos, $0+2\sqrt{11}+4\sqrt{5}+6\sqrt{3}+8\sqrt{2}+2\sqrt{35}+6$. Ratio igitur quam habet hoc aggregatum ad totidem radices maximæ æquales, puta ad $13\sqrt{36}$ vel 13×6, hoc eſt ad 78, non explicatius efferri poterit quam $\frac{2\sqrt{11}+4\sqrt{5}+6\sqrt{3}+8\sqrt{2}+2\sqrt{35}+6}{78}$, vel $\frac{\sqrt{11}+2\sqrt{5}+3\sqrt{3}+4\sqrt{2}+\sqrt{35}+3}{39}$. Atq; ea eſt ratio quam habet aggregatum iſtorum Sinuum rectorum in Semicirculo, ad totidem rectas radio æquales & parallelas in Parallelogrammo huic ſemicirculo circumſcripto. Si autem ſinus maximus $\sqrt{36}=6$ ſupponatur bis poni (pro utroq; ſcilicet quadrante ſemel) atq; eapropter pro 13 æqualibus, ponantur 14; (puta, pro $13\times6=78$ ponatur $14\times6-84$;) eadem erit hæc ratio cum ea quam ſupra provenire diximus poſito radio partium ſex.

Pariter, ſi Diameter ponatur partium 20; ſinus recti in Semicirculo erunt $\sqrt{:}0\times20-0:+\sqrt{:}1\times20-1:+\sqrt{:}2\times20-4:+\sqrt{}$

Digitized by Google

$\dagger\sqrt{:3\times20-9}:\dagger\sqrt{:4\times20-16}:\dagger\sqrt{:5\times20-25}:\dagger\sqrt{:6\times20-36}:$ $\dagger\sqrt{:7\times20-49}:\dagger\sqrt{:8\times20-64}\dagger\sqrt{:9\times20-81}:\dagger\sqrt{:10\times20-100}:\dagger\sqrt{:11\times20-121}\dagger\sqrt{:12\times20-144}:\dagger\sqrt{:13\times20-169}:$ $\dagger\sqrt{:14\times20-196}:\dagger\sqrt{:15\times20-225}:\dagger\sqrt{:16\times20-256}:\dagger\sqrt{:}$ $17\times20-289}:\dagger\sqrt{:18\times20-324}:\dagger\sqrt{:19\times20-361}:\dagger\sqrt{:}$ $20\times20-400$. Hoc eſt $\sqrt{0}\dagger\sqrt{19}\dagger\sqrt{36}\dagger\sqrt{51}\dagger\sqrt{64}\dagger\sqrt{75}$ $\dagger\sqrt{84}\dagger\sqrt{91}\dagger\sqrt{96}\dagger\sqrt{99}\dagger\sqrt{100}\dagger\sqrt{99}\dagger\sqrt{96}\dagger\sqrt{91}\dagger\sqrt{84}$ $\dagger\sqrt{75}\dagger\sqrt{64}\dagger\sqrt{51}\dagger\sqrt{36}\dagger\sqrt{19}\dagger\sqrt{0}$ Vel $2\sqrt{0}\dagger2\sqrt{19}\dagger2\sqrt{36}$ $\dagger2\sqrt{51}\dagger2\sqrt{64}\dagger2\sqrt{75}\dagger2\sqrt{84}\dagger2\sqrt{91}\dagger2\sqrt{96}\dagger2\sqrt{99}\dagger$ $\sqrt{100}$. (Nempe iidem ipſi qui ſupra in quadrante habentur poſito radio partium 10, bis hic poſiti; nili quod ſinus maximus utriq; quadranti communis non repetatur.) Vel etiam $0\dagger2\sqrt{19}\dagger12\dagger2\sqrt{51}\dagger16\dagger10\sqrt{31}\dagger4\sqrt{21}\dagger2\sqrt{91}\dagger8\sqrt{6}$ $\dagger6\sqrt{11}\dagger10$. Vel deniq; (quia $0+12+16+10=38$) $38\dagger2\sqrt{19}\dagger2\sqrt{51}\dagger10\sqrt{3}\dagger4\sqrt{21}\dagger2\sqrt{91}\dagger8\sqrt{6}\dagger6\sqrt{11}$. Adeoq; ratio quam habet aggregatum illud radicum, ad maximam toties poſitam, (puta $21\times10=210$)

eſt $\frac{38\dagger2\sqrt{19}\dagger2\sqrt{51}\dagger10\sqrt{3}\dagger4\sqrt{21}\dagger2\sqrt{91}\dagger8\sqrt{6}\dagger6\sqrt{11}}{210}$.

vel $\frac{19\dagger\sqrt{19}\dagger\sqrt{51}\dagger5\sqrt{3}\dagger2\sqrt{21}\dagger\sqrt{91}\dagger4\sqrt{6}\dagger3\sqrt{11}}{105}$.

Et quidem quo plures ponantur Radii vel Diametri partes, eò minus videtur explicabilis ratio ſinuum omnium ad maximum toties ſumptum: adeóq; ſi ſupponantur radii vel diametri partes infinitæ, (quod ad ſcopum noſtrum faciendum videtur,) ratio ſinuum omnium ad radium toties poſitum, hoc eſt, Quadrantis vel Semicirculi ad Quadratum vel Parallelogrammum circumſcriptum, videatur penitus inexplicabilis, ſaltem niſi ejuſmodi explicatio ſufficere judicanda ſit, qualem prop. 121 & 135. exhibuimus.

His itaq; perpenſis, prope abfuit ut rem quaſi penitus conclamatam ulterius inveſtigando deſiſterem. Id unicum quod ſpem fecit hoc erat. Nempe quod eâdem difficultate non obſtante, in radicibus quadraticis, cubicis, biquadraticis &c. numerorum Arithmetice proportionalium res non male ſucceſſit.

Nam, verbi gratia, ſi ſeries Subſecundanorum aliquouſq; continuetur, puta $\sqrt{0}\dagger\sqrt{1}\dagger\sqrt{2}\dagger\sqrt{3}\dagger\sqrt{4}\dagger\sqrt{5}\dagger\sqrt{6}$, ipſius ratio ad maximum toties poſitum, puta $7\sqrt{6}$, non videtur aliàs ex-

Digitized by Google

plicabilis quam $\frac{\sqrt{0}+\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{0}}$, vel, $\frac{0+1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$, vel saltem (propter $0+1+2=3$) $\frac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{6}}{7\sqrt{6}}$; nisi forsan placeat tam antecedentem quam consequentem rationis ducere in $\sqrt{6}$, ut prodeat ratio $3\sqrt{6}+\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}+\sqrt{36}$, ad 7; vel potius $3\sqrt{6}+2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}+6$, ad 7. Et similiter in aliis ejusmodi seriebus.

Verum si eadem series supponatur in infinitum continuanda, prodibit tandem ratio $\frac{2}{3}$, vel 2 ad 3, aut 1 ad $1\frac{1}{2}$. ut dictum est prop. 53,54. ipsa quidem infinitate (quod mirum videatur) irrationalitatem destruente.

Et similiter in subtertianis, subquartanis, &c. continget, ut patet ex superius traditis prop. 54,59.

Cum itaq;, illa difficultate non obstante, quadratura Parabolæ & ab aliis antehac & a nobis etiam nostra methodo, sed & Paraboloideos cujusvis quadratura (eâdem manente difficultate) a nobis in superioribus satis feliciter tradita sit; non plane omnis aberat spes rationem tandem inveniendi quam Radicum universalium (seriei vel auctæ vel mulctatæ) series habeat ad seriem æqualium, & quidem si non universaliter, in quibusdam saltem, quadantenus explicandi; fortassis etiam in illis ipsis quæ Circuli vel Ellipseos, & quæ Hyperbolæ quadraturam attingunt nonnihil proficere.

Ut autem quid deinceps sit inquirendum rectiùs perspiciatur, meminisse licet nos (inter alia) circuli (vel etiam Ellipseos cujusvis) quadraturam huc usq; perduxisse.

Nempe, per prop. 118, & 121, si rationum series illa $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}, \frac{384}{945}$, &c. interpolari poterit; ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet Circuli Quadrans ad Quadratum Radii, vel Circulus ipse ad quadratum Diametri.

Item, per prop 133, & 135, si interpolari poterit rationum series ista $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c. ratio illa quæ primæ & secundæ ponenda est intermedia, est ea quam habet semicirculus ad Quadratum diametri.

Sed & insuper, si interpolari poterint numeri diagoniales tabellæ

bellæ prop. 132 nempe 1, 2, 6, 20, 70, &c. ratio quam habet unitas ad numerum eorundem primo & secundo intermedium, est ea quam habet Circulus ad Quadratum Diametri: Et Ellipsis ad Parallelogrammum circumscriptum. Ut deinceps probabitur, ex prop. seq.

PROP. CLXVI. *Theorema.*

SI series infinita Æqualium, Primanorum, Secundanorum, aut Tertianorum, &c. respective ducatur in seipsam inverse positam; atq; eadem etiam in seipsam directe positam: erit aggregatum rectangulorum illorum, ad aggregatum horum; ut 1 ad 1, 2, 6, 20, 70, &c. numeros diagoniales Tabellæ prop. 132.

Nam si series Æqualium in seipsam (sive directe sive inverse positam) respective ducatur, fit series Æqualium: cui convenit ratio 1 ad 1.

Si autem series Primanorum in seipsam directe positam sic multiplicetur; fiet series Secundanorum; si series Secundanorum sic ducatur, fiet series Quartanorum; si series Tertianorum, fiet series Sextanorum; &c. per prop. 73. Quibus conveniunt rationes $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{7}$. $\frac{1}{9}$. &c. per prop. 44 vel 64.

Si autem Series Primanorum respective ducatur in seipsam inversam; (puta series a, b, c, &c. in seriem $D - a$, $D - b$, $D - c$, &c.) Item series Secundanorum in seipsam inversam, (puta series a^2, b^2, c^2, &c. in seriē $\mathcal{Q}:D-a.\mathcal{Q}:D-b.\mathcal{Q}:D-c$ &c. vel $D^2 - 2aD + a^2$. $D^2 - 2bD + b^2$. $D^2 - 2cD + c^2$. &c.) Item series Tertianorum in seipsam inversam; (puta series a^3, b^3, c^3, &c. in seriem $C:D-a$. $C:D-b$. $C:D-c$. &c.) Et sic de reliquis; Rationes ipsis convenient, $\frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c. per prop. 133, 134.

Ratio igitur rationum harum ad rationes illas, ea est quam habet 1 ad numeros 1, 2, 6, 20, 70, &c. nempe numeros diagoniales tabellæ prop. 132 (ut ex calculo patet) Quod erat demonstrandum.

$\frac{1}{3}) \frac{1}{6} (\frac{1}{1}$
$\frac{1}{3}) \frac{1}{6} (\frac{1}{2}$
$\frac{1}{5}) \frac{1}{30} (\frac{1}{6}$
$\frac{1}{7}) \frac{1}{140} (\frac{1}{20}$
$\frac{1}{9}) \frac{1}{630} (\frac{1}{70}$

SCHOL.

Digitized by Google

SCHOLIUM.

Notandum hic, in serie rationem $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$, &c. Denominatores sive consequentes sunt Arithmetice proportionales; adeoq; si in singulis intervallis totidem essent interponendæ rationes, essent illæ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}$, &c. juxta analogiam Arithmetice-proportionalium, & leges prop. 44. & 64.

In serie vero rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}$, &c; consequentes 1, 6, 30, 140, 630, &c. sunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, &c. vel $1 \times \frac{12 \times 20 \times 28 \times 36 \text{ &c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ &c.}}$ (ubi fractionum tam numeratores quam denominatores sunt Arithmetice proportionales.) Et propterea (juxta progressionis illius analogiam) si numerus primo & secundo interponendus dicatur A; fient reliqui, reliquis intervallis interponendi, continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{16 \times 24 \times 32 \text{ &c}}{3 \times 5 \times 7 \text{ &c}}$ (Et quidem numerus primo anteponendus $\frac{1}{3}$ A; juxta eandem analogiam. In præcedenti autem, & propterea in mox sequenti serie, numerus primo anteponendus evanescit; nempe, illic in nihil, istic in infinitum.)

In serie deniq; rationum $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{70}$, &c. Consequentes 1, 2, 6, 20, 70, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2 \times 6 \times 10 \times 14 \text{ &c}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ &c}}$ vel $1 \times \frac{4 \times 12 \times 20 \times 28 \text{ &c.}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ &c.}}$ (ubi, ut supra, tam numeratores quam denominatores fractionum sunt Arithmetice-proportionales.) Et propterea (juxta progressionis analogiam) si numerus primo & secundo interponendus dicatur α, fiunt reliqui continuâ multiplicatione numerorum $\alpha \times \frac{8 \times 16 \times 24 \text{ &c.}}{3 \times 5 \times 7 \text{ &c.}}$

PROP. CLXVII. *Coroll.*

IDeoq;, Si series infinita Subsecundanorum (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.) respective ducatur in seipsam inversam (puta $\sqrt{:}\,D - a.\ \sqrt{:}\,D - b.\ \sqrt{:}\,D - c.$ &c. atq; eadem etiam in seipsam directe positam: (puta series $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in seriem $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c.)

Digitized by Google

&c.) erit aggregatum rectangulorum illorum (puta $\sqrt{:}\, a\,\mathrm{D} - a^{2:} + \sqrt{:}\, b\mathrm{D} - b^{2:} + \sqrt{:}\, c\,\mathrm{D} - c^{2:}$ &c.) ad aggregatum horum (puta $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} + \sqrt{c^2}$ &c. vel $a + b + c$ &c.) ut unitas ad numerum intermedium, numeris diagonialibus 1, 2, in Tabella prop. 132 interponendum.

Sequitur ex præcedente. Nam series Subsecundanorum est seriei Æqualium, & seriei Primanorum intermedia. (ut patet ex dictis prop. 64.)

Series autem Subsecundanorum in seipsam directe positam (puta $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$, &c. in $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ &c) est series Primanorum (puta $\sqrt{a^2}, \sqrt{b^2}, \sqrt{c^2}$ &c vel a, b, c, &c.) cui convenit ratio $\frac{1}{2}$ per prop. 44, vel 64. Et propterea, si ratio quæ convenit seriei Primanorum in seipsam inversam ductæ (intermedia nempe rationibus $\frac{1}{1}, \frac{4}{6}$,) dicatur $\frac{1}{2\square}$: Ratio rationis hujus $\frac{1}{2\square}$ ad illam $\frac{1}{2}$, puta $\frac{1}{2}$) $\frac{1}{2\square}$ ($\frac{1}{\square}$, erit (per præced.) ea quam habet 1 ad numerum inter 1 & 2 interponendum, in serie digonialium 1, 2, 6, 20, 70, &c. tabellæ prop. 132. *Qui numerus igitur in posterum dicatur* $\square$. Estq; semissis numeri inter 1 & 6 interponendi in serie 1, 6, 30, 140, 630, &c.

PROP. CLXVIII. *Corollar.*

ET propterea; *Circulus ad quadratum diametri, est ut* 1 *ad* $\square$, *numerum nempe inter* 1 *&* 2 *interponendum in serie diagonalium* 1, 2, 6, 20, 70, *&c. tabellæ prop.* 132.

Cum enim (per prop. 133, 135.) Semicirculus ad Quadratum diametri sit ut 1 ad 2 $\square$ (numerum intermedium inter 1 & 6 in serie 1, 6, 30, 140, 630, &c.) erit circulus (quippe semicirculi duplus) & 1 ad $\square$, (numerum intermedium inter 1 & 2 in serie 1, 2, 6, 20, 70, &c.) per præced,

Et quidem eadem ratio $\frac{1}{\square}$; ea est, quæ intermedia ponenda est inter $\frac{1}{1}$ & $\frac{2}{3}$, in serie $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{95}$ &c. prop. 118, & 121. ut & deinceps etiam ulterius patebit.

SCHOL.

Digitized by Google

SCHOLIUM.

Cum igitur (ut ad ea quæ monuimus in Schol. prop. 165. tandem redeamus) res eò redacta sit, ut si possimus rationes illas interpolare (prop. 118. memoratas) $\frac{1}{1}, \frac{2}{3}, \frac{8}{15}, \frac{48}{105}$, &c. hoc est, quas habet 1 ad 1, $\frac{2}{2}, \frac{16}{8}, \frac{1024}{448}$, &c. (hoc est, ad 1, $1\frac{1}{2}, 1\frac{7}{8}, 2\frac{9}{16}$, &c.) qui termini consequentes fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \text{ &c}}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \text{ &c.}}$

Vel etiam illas (prop. 133.) $\frac{1}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}$, &c. quarum termini consequentes 1, 6, 30, 140, &c. fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{6 \times 10 \times 14 \times 18 \text{ &c.}}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \text{ &c.}}$

Vel deniq; si illas $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}$, &c; nempe quas habet 1 ad 1, 2, 6, 20, &c. (numeros diagoniales tabellæ prop. 132.) qui fiunt ex continua multiplicatione numerorum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{6}{2} \times \frac{10}{3} \times \frac{14}{4}$ &c.

Si, inquam, harum rationum seriem unam aliquam interpolare possimus, habebitur accuratissima circuli quadratura. Et quidem in prima & tertia interponenda erit (post primam) ratio $\frac{1}{\square}$: in secunda vero ratio $\frac{1}{\square}$. Adeoq; interpolatione in una præstita, in reliquis etiam non difficulter fiet.

Placet igitur (ut inde exordium sumamus, unde major elucet spes quæsitum consequendi) Tabellam illam prop. 132. aggredi, ut videamus numquâ possimus arte illam interpolare: Adeóq;, ipsam repetere intermissis alternatim spaciis, (ut quæ istic sunt series prima, secunda, tertia, &c. sint hic secunda, quarta, sexta, &c.) Et paulo accuratius examinare; quod sequentibus aliquot propositionibus fiet.

PROP. CLXIX. *Theorema.*

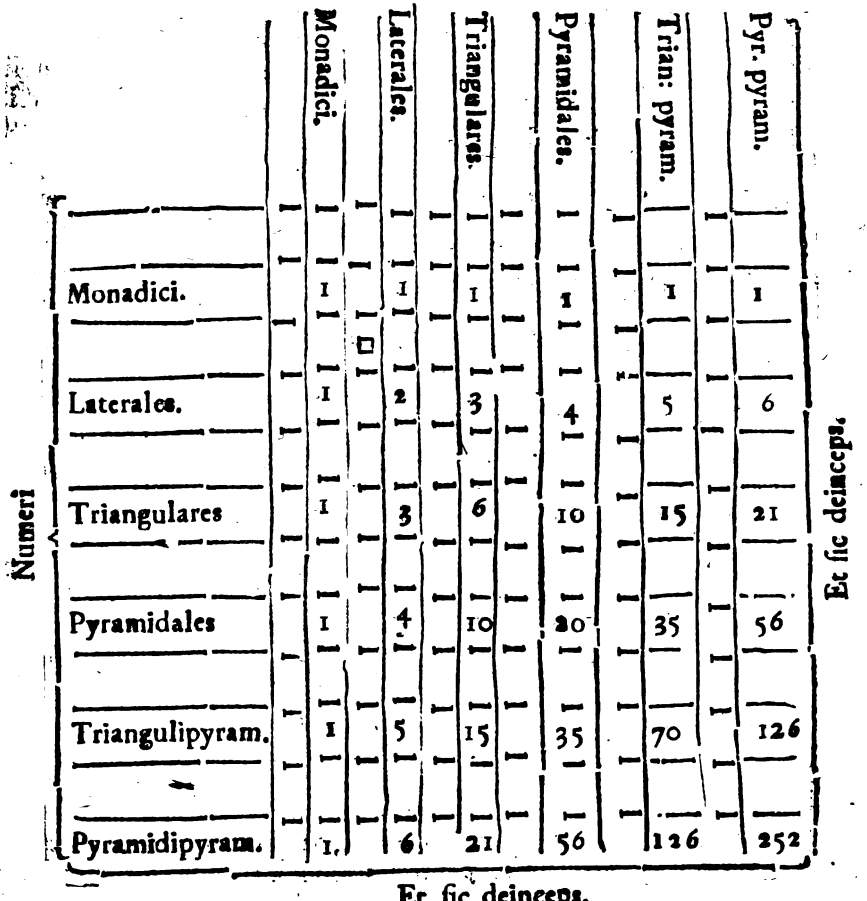
NUmeri omnes Tabellæ prop. 132. sunt figurati. Nempe, qui in illius serie primâ (sive erecta sive transversa) sunt monadici; qui in tertia, Triangulares; qui in quarta, Pyramidales; & sic deinceps, puta Trianguli pyramidales, Pyramidi-pyramidales, &c.

Numer.

Digitized by Google

Patet hoc inſpecta tabella: & comparatis (ſi opus;) iis, quæ de numeris figuratis apud Maurolicum aut alios occurrunt. Nominibus autem illis utor, quibus Dn. Oughtredus noſtras (Mathematicus eximius) in ipſius *Clavi Mathematicæ* cap. 17. n. 11.

Quæ autem ſunt in illa tabella prop. 132. ſeries prima, ſecunda, tertia, &c. jam in eadem hic repetita fiunt (propter intermiſſa ſpatia, numeris, ſi fieri poſſit, replenda) ſecunda, quarta, quinta, &c.



PROP. CLXX. *Theorema.*

SEries duæ, in expoſita Tabella, nempe Monadicorum, & Lateralium, facile interpolari poſſunt (locis interponendis quotlibet;) interpoſitis ſcil. illic quot opus eſt, unitatibus, hic, totidem mediis Arithmeticis.

Puta, ſi placet unum ubiq; numerum interponere; erit monadicorum ſeries interpolata, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. Lateralium vero $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6. vel $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$, 2, $\frac{5}{2}$, 3, $\frac{7}{2}$, 4, $\frac{9}{2}$, 5, $\frac{11}{2}$, 6.

Ratio patet; quoniam numeri ſunt illic æquales, hic Arithmetice-proportionales.

SCHOLIUM.

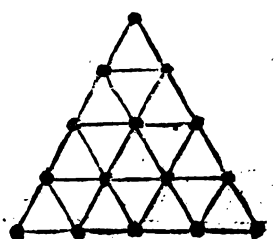
Reliquæ autem ſeries non ita facile interpolantur, niſi invento prius cujuſq; ſeriei proprio charactere; quod ſequentibus propoſitionibus inveſtigabimus.

PROP. CLXXI. *Lemma.*

PRopoſitum ſit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulares, ad ſuum latus.

Illud hoc progreſſu inveſtigabimus.

1. Si puncta totidem, quot numerus aliquis triangularis poſtulat, debita forma triangulari diſponantur, & rectis conjungantur, ut in appoſito ſchemate; manifeſtum eſt totam figuram triangularem in tot triangula dividi (tam toti, quam inter ſe ſimilia) quot eſt quadratũ numeri lateralis unitate minuti. (quod ſi opus ſit, demonſtrari poteſt ex 19 e 6.) Adeoq; ſi ipſius numerus lateralis ſit *l*, erit numerus triangulorum parti-



particularium $Q : l - 1 : = l^2 - 2l + 1$.

2. Quum horum triangulorum quodlibet habeat tres angulos, erit horum angulorum numerus $3l^2 - 6l + 3$.

3. Notandum est ad totius figuræ tria puncta angularia, non nisi tot angulos apponi (nempe ad singula unum:) & propterea illi tres anguli occupant tria puncta, seu $3P$.

4. Ad reliqua puncta in lateribus, terminantur anguli terni; quorum igitur quilibet occupat trientem puncti. Sunt autem intermedia illa puncta lateralia, in quolibet latere $l - 2$, ergo in omnibus $3l - 6$, (nempe propter tria latera;) & anguli ad hæc intermedia puncta adjacentes $9l - 18$, (propter ternos angulos ad singula puncta;) quorum quilibet occupat trientem puncti, seu $\frac{1}{3}P$; adeoque omnes occupant $\frac{9l - 18}{3}P$.

5. Ad reliqua quæ supersunt puncta, intra aream figuræ, terminantur anguli seni (ad quodlibet nempe sex,) qui propterea occupant sextantem puncti. Quot autem illi sunt anguli, sic colligitur. Totus angulorum numerus est (ut diximus) $3l^2 - 6l + 3$: Hinc si subducantur 3 (ad totius figuræ angulos positi,) & $9l - 18$ (ad puncta lateralia adjacentes) manebunt $3l^2 - 15l + 18$; qui est numerus angulorum ad puncta intra aream terminatorum. Cum verò horum quilibet occupat sextantem puncti, sive $\frac{1}{6}P$; occupabunt hi omnes $\frac{3l^2 - 15l + 18}{6}P$.

6. Deniq;, si simul addantur puncta sic inventa; nempe $3P$ & $\frac{9l - 18}{3}P$ & $\frac{3l^2 - 15l + 18}{6}P$; erit horum aggregatum $\frac{l^2 + l}{2}$ Puncta; numerus punctorum omnium: Hoc est, numerus triangularis cujus latus l. Ideoq; ----

PROP. CLXXII. *Theorema.*

LAtus numeri cujusvis Triangularis ad ipsum numerum, est ut l ad $\frac{l^2 + l}{2}$

Ut ostensum est in præced.

Digitized by Google

Adeoq; , dato latere l dabitur numerus Triangularis isti lateri conveniens , puta $n = \frac{l^2 + l}{2}$.

Et contra, Dato numero Triangulari, invenietur ipsius latus.

Nempe, resolvendo hanc Æquationem $2n = l^2 + l$, erit $\sqrt{:\frac{1}{4} + 2n:} - \frac{1}{2} = l$.

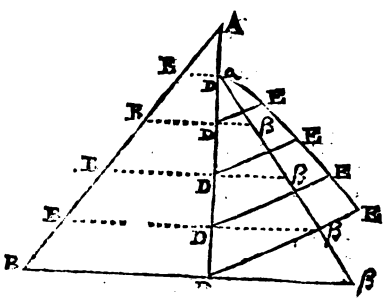
PROP. CLXXIII. *Corell.*

SI Hyperbolæ Diameter transversa sit 1, *& Latus rectum* $\frac{1}{2}$; *sumptis diametris (puncto applicationis & vertice interceptis)* 1, 2, 3, 4, 5, *&c. Ordinatim-applicatarum quadrata erunt* 1, 3, 6, 10, 15. *&c. nempe numeri triangulares, cujus latera sunt* 1, 2, 3, 4, 5, *&c.*

Probatur per 17 vel 33 prop. Con. Sect. nost. Hyperbolam ipsam exhibebit figura prop. seq.

PROP. CLXXIV. *Corollarium.*

ITem, si fiant ad eandem rectam AαD duo triangula similia, αDβ, *ADB ; sitq; ut* 1 *ad* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ *sic AD ad DB & αD ad Dβ ; & sumantur æquales Aα* = 1 = *αD* = *DD &c. Rectangula BDβ, EDβ, &c. erunt ad invicem. ut* 1, 3, 6, 10, *&c. numeri triangulares, quorum latera sunt αD, αD, &c. Mediæ vero proportionales inter BD, Dβ; DE, Dβ &c, sunt ordinatim-applicatæ in Hyperbola ADE ; cujus diameter transversa Aα, & latus rectum αB, vel ipsi æquale.*



Patet ex calculo. Nam rectangulorum BDβ, primum erit $\sqrt{\frac{1}{2}} \times 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 1$. Secundum $2\sqrt{\frac{1}{2}} \times 3\sqrt{\frac{1}{2}} = 3$. Tertium $3\sqrt{\frac{1}{2}}$

$\times 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 6$. Quartum $4\sqrt{\frac{1}{2}} \times 5\sqrt{\frac{1}{2}} = 10$. Et sic deinceps. Quæ sunt quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola, per præced. ideoq; Mediæ proportionales puta $\sqrt{1}, \sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{10}$, &c. ipsæ ordinatim-applicatæ.

SCHOLIUM.

Si autem sumpta fuissent AD = DB & αD = Dβ, tum rectangula fuissent $1 \times 2 = 2$. $2 \times 3 = 6$. $3 \times 4 = 12$. $4 \times 5 = 20$, &c. dupla numerorum triangularium: & Mediæ proportionales $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{12}, \sqrt{20}$, &c. essent ordinatim-applicatæ in Hyperbola, cujus tam latus rectum quam latus transversum sit 1. ut, ex dictis, consideranti patebit.

PROP. CLXXV. *Theorema.*

SEries numerorum Triangularium, in præmissa tabella, commode interpolari poterit, si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ arithmeticæ, quot opus est, & ex iis formentur numeri triangulares, juxta prop. 172.

Puta si in serie numerorum triangularium 1, 3, 6, 10, 15, &c. unus ubiq; interponendus est numerus; eorum latera 1, 2, 3, 4, 5, &c. mediis arithmeticis debite interpolata erunt $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, &c. quibus lateribus (per prop 172.) respondent numeri triangulares, $\frac{3}{8}$, 1, $1\frac{7}{8}$, 3, $4\frac{3}{8}$, 6, $7\frac{7}{8}$, 10, $12\frac{3}{8}$, 15, $17\frac{7}{8}$, 21, &c. Vel $\frac{3}{8}$, 1, $\frac{15}{8}$, 3, $\frac{35}{8}$, 6, $\frac{63}{8}$, 10, $\frac{99}{8}$, 15 $\frac{143}{8}$, 21; &c. Vel deniq; $\frac{3}{8}$. $\frac{8}{8}$, $\frac{15}{8}$, $\frac{24}{8}$, $\frac{35}{8}$, $\frac{48}{8}$, $\frac{63}{8}$, $\frac{80}{8}$, $\frac{99}{8}$, $\frac{120}{8}$, $\frac{143}{8}$ $\frac{168}{8}$, &c. quorum quidem differentiæ sunt Arithmetice-proportionales.

Pari modo, si interponendi sint in singulis intervallis duo loci; prodirent numeri, $\frac{3}{9}$. $\frac{5}{9}$. 1. $\frac{14}{9}$. $\frac{20}{9}$. 3. $\frac{35}{9}$. $\frac{44}{9}$. 6. $\frac{65}{9}$. $\frac{77}{9}$. 10. &c. Vel $\frac{3}{9}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{9}{9}$, $\frac{14}{9}$, $\frac{20}{9}$, $\frac{27}{9}$, &c. quorum item differentiæ sunt Arithmetice proportionales.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CLXXVI. *Lemma.*

PRopositum sit inquirere quam habeant rationem numeri Pyramidales, ad latus suum.

Liceret & hanc propositionem pari progressu investigare, quo in prop. 171 usus sum: (observato interim discrimine quo differt debita numeri pyramidalis dispositio a dispositione numeri Triangularis:) quod qui volet experiri poterit. Verum cum non ita facile esset lectori concipere debitum punctorum situm in pyramide (ut quæ non omnia supponenda sunt in eodem plano) & angulorum solidorum ad ea puncta positionem: satius videtur illud hac quæ sequitur methodo præstare. (Quæ quidem, nisi mallem utrumq; modum ostendisse, adhiberi potuisset etiam ad prop. 171.)

1 Numerus Pyramidalis æquatur aggregato numerorum triangularium (ut patet ex dictis ad prop. 130. & 132.) nempe ab unitate ad numerum Triangularem sibi collateralem inclusive. (sicut & numeri Triangulares fiunt aggregatione Lateralium; & Laterales, Monadicorum; ut & Triangulipyramidales, Pyramidalium; & sic deinceps.)

2. Est autem lateris l, numerus quilibet Triangularis $\frac{l^2+l}{2}$. per prop. 171.

3. Ergo, sumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c; vel (eorum loco) a, b, c, d, &c; summa horum a^2+a, b^2+b, c^2+c, d^2+d, &c, erit duplum aggregati Triangularium; (quorum numerus erit æqualis lateri maximi:) & hujus propterea semissis, erit numerus Pyramidalis, cujus latus æquatur lateri maximi Triangularium.

$$2)\ \begin{matrix} a^2+a \\ b^2+b \\ c^2+c \\ d^2+d \\ \&c \end{matrix}$$

Num. Pyramid.

4. Est igitur numerus Pyramidalis semissis aggregati duarum serierum; eousq; ab unitate continuatarum, donec numerus locorum æquetur lateri numeri Pyramidalis quæsiti, quod supponatur l: Quibus si præponatur locus alter o^2+o, (ut series intelligantur ab o inchoatæ,) fiet harum numerus $l+1$. Et utriusq;

Digitized by Google

utriusq; seriei summa seorsim innotescet per prop. 2 & 20.

5. Nempe, summa seriei primanorum $0 + a + b + c$. &c, quorum ultimum est l, numerus locorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2} l$. per prop. 2.

6 Et summa seriei secundanorum $0 + a^2 + b^2 + c^2$ &c, quorum ultimum est l^2 & numerus locorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6l} l^2$ vel $\frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6} l$. per Prop. 20.

7 Utriusq; igitur summæ aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2} l + \frac{l+1}{3} l^2 + \frac{l+1}{6} l$,) nempe $\frac{3l^2+3l+2l^3+3l^2+l^2+l}{6} = \frac{2l^3+6l^2+4l}{6}$, est aggregatum duarum serierum; cujus aggregati semissis $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$ est numerus pyramidalis cujus latus l. Ideoq; -----

PROP. CLXXVII. *Theorema.*

LAtus numeri cujusvis Pyramidalis ad ipsum numerum suum, est ut l ad $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$

Ut ostenditur est in præced.

At, dato numero pyramidali n, non innotescit ipsius latus, nisi resolvendo Æquationem Cubicam $6n = l^3 + 3l^2 + 2l$.

PROP. CLXXVIII. *Theorema.*

SEries numerorum Pyramidalium, in præmissa tabella commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus tot interponantur mediæ arithmeticæ quot opus est, & ex iis formentur numeri pyramidales, juxta prop. præced.

Puta, si numerorum pyramidalium 1,4,10,20,35,56, &c. latera

latera 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. si impolata sint $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$, 6, &c. hisce lateribus respondebit serie pyramidalium $\frac{5}{16}$, 1, $2\frac{3}{16}$, 4, $6\frac{9}{16}$, 10, $14\frac{7}{16}$, 20, $26\frac{13}{16}$, 35, $44\frac{11}{16}$, 56, &c. vel etiam $\frac{5}{16}$, 1, $\frac{35}{16}$, 4, $\frac{105}{16}$, 10, $\frac{231}{16}$, 20, $\frac{429}{16}$, 35, $\frac{715}{16}$, 56, &c. Vel potius, $\frac{15}{48}$, 1, $\frac{105}{48}$, 4, $\frac{315}{48}$, 10, $\frac{693}{48}$, 20, $\frac{1287}{48}$, 35, $\frac{2145}{48}$, 56, &c.

PROP. CLXXIX. *Lemma.*

PRoposítum sit inquirere, quam habeant rationem numeri Triangulipyramidales ad latus suum.

Præstabitur hoc eâdem methodo quâ prop. 176. Nempe.

1. Numerus Triangulipyramidalis æquatur aggregato numerorum omnium Pyramidalium (intellige, quorum latera sunt numeri integri, nam de interpolatis hic non agitur,) ab unitate ad numerum sibi collateralem, inclusive.

2. Est autem lateris l, numerus Pyramidalis $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$ per prop. 177.

3. Ergo, sumptis lateribus 1, 2, 3, 4, &c. vel (eorum loco) a, b, c, d, &c. summa horum a^3+3a^2+2a, b^3+3b^2+2b, c^3+3c^2+2c, d^3+3d^2+2d, &c. erit sextuplum aggregati Pyramidalium (quorum omnium numerus erit æqualis lateri eorum maximi, ut patet:) & propterea hujus aggregati sextans erit numerus Triangulipyramidalis, cujus latus idem erit cum latere maximi Pyramidalium.

6) a^3+3a^2+2a
b^3+3b^2+2b
c^3+3c^2+2c
d^3+3d^2+2d
&c.

Num. Triangulipyram.

4 Adeoq; numerus Triangulipyramidalis est sexta pars aggregati trium serierum, eousq; ab unitate continuatarum donec numerus terminorum sit æqualis lateri numeri Triangulipyramidalis propositi, quod dicatur l: adeoq; si ipsis præponatur terminus alter 0^3+0^2+0 (ut series intelligantur ab ● inchoatæ) fiet numerus terminorum $l+1$. Et singularum serierum illarum, summa seorsim innotescet per prop. 2. 20. & 40.

5 Nempe

Digitized by Google

5 Nempe ſumma duplicatæ ſeriei Primanorum, $0+2a+2b+2c$, &c. cujus terminus ultimus $2l$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{2}2l$. per prop. 2.

6 Summa triplicatæ ſeriei ſecundanorum, $0+3a^2+3b^2+3c^2$ &c, cujus terminus ultimus $3l^2$, & numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{3}3l^2+\frac{l+1}{6l}3l^3$. per prop. 20.

7. Summa ſeriei Tertianorum, $0+a^3+b^3+c^3$ &c. cujus terminus ultimus l^3, numerus terminorum $l+1$; erit $\frac{l+1}{4}l^3+\frac{l+1}{4l}l^3$. per prop. 40.

8. Harum igitur ſummarum aggregatum, (puta $\frac{l+1}{2}2l+\frac{l+1}{3}3l^2+\frac{l+1}{6l}3l^3+\frac{l+1}{4}l^3+\frac{l+1}{4l}l^3$.) nempe $\frac{24l^3+24l+24l^3+24l^2+12l^2+12l+6l^4+6l^3+6l^3+6l^2}{24}$ $=\frac{6l^4+36l^3+66l^2+36l}{24}$ eſt aggregatum trium illarum ſerierum; cujus aggregati ſextans $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$ eſt numerus Triangulipyramidalis cujus latus l, Ideoq;----

PROP. CLXXX. *Theorema.*

LAtus numeri Triangulipyramidalis ad ipſum numerum, eſt ut l ad $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Adeoq;, Dato latere l dabitur numerus Triangulipyramidalis, puta $n=\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Dato autem numero Triangulipyramidali, non invenitur ipſius latus niſi reſolvendo hanc æquationem $24n=l^4+6l^3+11l^2+6l$.

Digitized by Google

PROP. CLXXXI. *Theorema.*

SEries numerorum Triangulipyramidalium, in præmissa Tabella, commode interpolari poterit; si ipsorum numeris lateralibus, tot interponantur medii Arithmetici, quot opus est, & ex iis formentur numeri Triangulipyramidales, per præcedentem.

Puta lateribus interpolatis $\frac{1}{2}$, 1, 1 $\frac{1}{2}$, 2, 2 $\frac{1}{2}$, 3, 3 $\frac{1}{2}$, 4, 4 $\frac{1}{2}$, 5, 5 $\frac{1}{2}$, 6, &c. respondent numeri Triangulipyramidales $\frac{1}{128}$, 1, 2 $\frac{19}{128}$, 5, 9 $\frac{3}{128}$, 15, 23 $\frac{19}{128}$, 35, 50 $\frac{35}{128}$, 70, 94 $\frac{123}{128}$, 126, &c. vel etiam $\frac{27}{128}$, 1, $\frac{155}{128}$, 5, $\frac{1155}{128}$, 15, $\frac{2001}{128}$, 35, $\frac{6435}{128}$, 70, $\frac{12155}{128}$, 126, &c. Vel potius $\frac{105}{1024}$, 1, $\frac{945}{1024}$, 5, $\frac{10395}{1024}$, 15, $\frac{27027}{1024}$, 35, $\frac{59535}{1024}$, 70, $\frac{109395}{1024}$, 126, &c.

PROP. CLXXXII. *Lemma.*

PRopositum sit inquirere, quam ad latus suum rationem habeant sequentium serierum numeri Figurati puta Pyramidipyramidales, &c.

Posset quidem hoc præstari eadem methodo quâ usus sum ad prop. 176, & 179. ope propositionum ibidem memoratarum, nempe pr. 2, 20, & 40, simul cum prop. 43. saltem si prius ulterius prosecuti fuerimus traditionem rationum quas habent series finitæ Quartanorum, Quintanorum, Sextanorum, (cum sequentibus,) ad series Æqualium; quam traditionem non nisi leviter innuimus ad prop. 43. Eam vero siquis ulterius continuandam velit, licebit ipsi vel aliâ quæ sibi maxime placeat methodo id præstare, vel etiam (nisi meliora ipsi occurrant auxilia) ope hujus ipsius quam jam præ manibus habemus Tabellæ, postquam viâ mox docenda ostenderimus rationes numerorum figuratorum ad suum cujuslibet latus in sequentibus seriebus investigare. Nam ut ad prop. 176 & 179, ex cognitis rationibus simplicium serierum finitarum (puta Primanorum, Secunda-

Digitized by Google

Secundanorum, Tertianorum, per prop. 2, 20, 40. ad seriem Æqualium) investigantur rationes hujus Tabellæ (puta numerorum Triangularium, Pyramidalium, Triangulipyramidalium, ad sua respective latera:) ita, vice versa, ex cognitis his licebit & illas expiscari, adeoq; illam propositionis 43 traditionem quousq; libet continuare.

Quoniam autem illud (ut diximus) non nisi leviter traditum est ad prop. 43. Nec quidem necesse sit ad præsens institutum illud ulterius prosequi, cum ex cognitis paucarum istius Tabellæ serierum characteribus (sive rationibus quas numeri isti figurati habent ad sua respective latera) sequentium etiam characteres investigandi methodus eluceſcat, ego illa ut facilioni jam utar, quæ hæc est.

Patet ex præmissis, character seriei numerorum.

Monadicorum 1. Lateralium l. Triangulorum $\frac{l^2+l}{2}$

Pyramidaliũ $\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$. Triangulipyram. $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$.

Patet etiam, accuratius intuenti, characteres hos fieri continua multiplicatione harum quantitatum,

$1\times\frac{l}{1}\times\frac{l+1}{2}\times\frac{l+2}{3}\times\frac{l+3}{4}$ &c. vel $1\times\frac{l\text{ in }l+1\text{ in }l+2\text{ in }l+3}{1\text{ in }2\text{ in }3\text{ in }4}$.

Nam $1\times\frac{l+0}{1}=l$.

$$1\times\frac{l+1}{2}=\frac{l^2+l}{2}$$

$$\frac{l^2+l}{2}\times\frac{l+2}{3}=\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$$

$$\frac{l^3+3l^2+2l}{6}\times\frac{l+3}{4}=\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$$

Adeoq;, si continuetur ulterius multiplicatio rationis ultimo inventæ in $\frac{l+4}{5}\times\frac{l+5}{6}\times\frac{l+6}{7}$ &c. habebimus sequentium serierum characteres.

Puta. $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$.

X x 2 Item,

Item $\frac{l^6+15l^5+85l^4+225l^3+274l^2+120l}{120}$

Et sic deinceps, quousq; libet.

SCHOLIUM.

Diximus modo, ex rationibus sive characteribus præsentis Tabellæ continuatis, deduci posse continuationem etiam rationum illarum quas indicat prop. 43. Quoniam vero illud fortasse non erit omnibus obvium: operæ pretium duxi paucis id in transitu ostendere. Quod quidem ut sine incommodo hic possit inseri, ita quibusdam forsan ingratum non erit. Ideoq;, exempli gratia, ----

Propositum sit inquirere, quam habeat rationem series finita Quartanorum, (ab o inchoata,) ad seriem totidem maximo Æqualium.

1. Character numeri Triangulipyramidalis, (per prop. 180:) est $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$ Et Pyramidi-pyramidalis $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$ per prop. 182.

2. Est autem, (ut sæpius dictum est,) numerus Figuratus uniusgradus (in præsenti tabella) aggregatum omniũ præcedentium in gradu sibi proximo: Adeoq; numerus Pyramidipyramidalis, est aggregatum Triangulipyramidalium.

$$24\Big)\begin{matrix} o^4+o^3+o^2+o \\ a^4+6a^3+11a^2+6a \\ b^4+6b^3+11b^2+6b \\ c^4+6c^2+11c^2+6c \\ \&c.\ ad \\ l^4+6l^3+11l^2+6l \end{matrix}\Big\}\text{Addita.}$$

$$\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{24\times 5=120}\ \text{Aggregatũ}$$

3. Et propterea, sumptis lateribus 1, 2, 3, &c. vel (eorum loco) a, b, c, &c. (quorum maximum dicatur l) & formatis inde numeris Triangulipyramidalibus; Horum aggregatum erit numerus Pyramidipyramidalis ejusdem lateris, nempe $\frac{l^5+10l^4+25l^3+50l^2+24l}{120}$.

4 Sum-

Digitized by Google

4. Summa autem ſeriei $0+6a+6b+6c$ &c, eſt (per prop. 2.) $\frac{l+1}{2}\,6l = \frac{6l^2+6l}{2}$.

5. Summa ſeriei $0+11a^2+11b^2+11c^2$ &c. eſt (per p. 20) $\frac{l+1}{3}\,11l^2 + \frac{l+1}{6l}\,11l^2 = \frac{11l^3+11l^2}{3} + \frac{11l^2+11l}{6} = \frac{22l^3+33l^2+11l}{6}$.

6. Summa ſeriei $0+6a^3+6b^3+6c^3$ &c, eſt (per prop. 40.) $\frac{l+1}{4}\,6l^3 + \frac{l+1}{4l}\,6l^3 = \frac{6l^4+6l^3}{4} + \frac{6l^3+6l^2}{4} = \frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4}$.

7. Hæ tres ſummæ in unam collectæ, ſunt $\frac{6l^2+6l}{2} + \frac{22l^3+33l^2+11l}{6} + \frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4} = \frac{9l^4+40l^3+60l^2+29l}{6}$.

8. Si igitur ex viginti quadruplo totius aggregati, auferatur ſumma trium ſerierum.

Nempe ſi ex 5) $l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l$
auferatur 6) $9l^4+40l^3+60l^2+29l$

Hoc eſt, Si ex 30) $6l^2+60l^4+210l^3+300l^2+144l$
auferatur 30) $+45l^4+200l^3+300l^2+145l$

Manebit ſumma ſeriei quartæ, quæ eſt Quartanorũ 30) $6l^5+15l^4+10l^2+00l^2-1l$

Hoc eſt
$$6l^3+6l^4$$
30) $$+9l^4+9l^2$$
$$+1l^2+1l^2$$
$$-1l^2-1l$$

Hoc eſt $\frac{l+1}{5}\,l^4 + \frac{3l+3}{10}\,l^3 + \frac{l+1}{30}\,l^2 - \frac{l+1}{30}\,l$

Quæ

Item $\frac{l^6+15l^5+85l^4+225l^3+274l^2+120l}{120}$

Et sic deinceps, quousq; libet.

SCHOLIUM.

Diximus modo, ex rationibus sive characteribus præsentis Tabellæ continuatis, deduci posse continuationem etiam rationum illarum quas indicat prop. 43. Quoniam vero illud fortasse non erit omnibus obvium: operæ pretium duxi paucis id in transitu ostendere. Quod quidem ut sine incommodo hic possit inseri, ita quibusdam forsan ingratum non erit. Ideoq;, exempli gratia, ----

Propositum sit inquirere, quam habeat rationem series finita Quartanorum, (ab o inchoata,) ad seriem totidem maximo Æqualium.

1. Character numeri Triangulipyramidalis, (per prop. 180:) est $\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$ Et Pyramidi-pyramidalis $\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{120}$ per prop. 182.

2. Est autem, (ut sæpius dictum est,) numerus Figuratus unius gradus (in præsenti tabella) aggregatum omniũ præcedentium in gradu sibi proximo: Adeoq; numerus Pyramidipyramidalis, est aggregatum Triangulipyramidalium.

$$24\Big)\begin{matrix}0^4+0^3+0^2+0\\ a^4+6a^3+11a^2+6a\\ b^4+6b^3+11b^2+6b\\ c^4+6c^3+11c^2+6c\\ \&c.\ ad\\ l^4+6l^3+11l^2+6l\end{matrix}\Big\}\text{Addita.}$$

$$\frac{l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l}{24\times 5=120}\ \text{Aggregatũ}$$

3. Et propterea, sumpeis lateribus 1, 2, 3, &c. vel (eorum loco) a, b, c, &c. (quorum maximum dicatur l) & formatis inde numeris Triangulipyramidalibus; Horum aggregatum erit numerus Pyramidipyramidalis ejusdem lateris, nempe $\frac{l^5+10l^4+25l^3+50l^2+24l}{120}$.

4 Sum-

4. Summa autem ſeriei $0+6a+6b+6c$ &c, eſt (per prop. 2.) $\frac{l+1}{2}\,6l = \frac{6l^2+6l}{2}$.

5. Summa ſeriei $0+11a^2+11b^2+11c^2$ &c. eſt (per p. 20) $\frac{l+1}{3}\,11l^2 + \frac{l+1}{6l}\,11l^2 = \frac{11l^3+11l^2}{3} + \frac{11l^2+11l}{6} = \frac{22l^3+33l^2+11l}{6}$.

6. Summa ſeriei $0+6a^3+6b^3+6c^3$ &c, eſt (per prop. 40.) $\frac{l+1}{4}\,6l^3 + \frac{l+1}{4l}\,6l^3 = \frac{6l^4+6l^3}{4} + \frac{6l^3+6l^2}{4} = \frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4}$.

7. Hæ tres ſummæ in unam collectæ, ſunt $\frac{6l^2+6l}{2} + \frac{22l^3+33l^2+11l}{6} + \frac{6l^4+12l^3+6l^2}{4} = \frac{9l^4+40l^3+60l^2+29l}{6}$.

8. Si igitur ex vigintiquadruplo totius aggregati, auferatur ſumma trium ſerierum.

Nempe ſi ex 5) $l^5+10l^4+35l^3+50l^2+24l$
auferatur 6) $9l^4+40l^3+60l^2+29l$

Hoc eſt, Si ex 30) $6l^2+60l^4+210l^3+300l^2+144l$
auferatur 30) $+45l^4+200l^3+300l^2+145l$

Manebit ſumma ſeriei quartæ, quę eſt Quartanorũ 30) $6l^5+15l^4+10l^2+00l^2-1l$

Hoc eſt
$$6l^5+6l^4$$
30) $$+9l^4+9l^2$$
$$+1l^2+1l^2$$
$$-1l^2-1l$$

Hoc eſt $\frac{l+1}{5}\,l^4 + \frac{3l+3}{10}\,l^3 + \frac{l+1}{30}\,l^2 - \frac{l+1}{30}\,l$

Quæ

Quæ est igitur summa seriei Quartanorum cujus terminus ultimus est l^4 numerus terminorum $l+1$.

Vel; si pro numero terminorum $l+1$, substituatur n, & propterea series æqualium nl^4; erit series Quartanorum $\frac{1}{5}nl^4 + \frac{1}{10}nl^3 + \frac{1}{30}nl^2 - \frac{1}{30}nl$. (si nempe terminus primus sit 0, secundus 1:) vel $\frac{nl^4}{5} + \frac{3nl^4}{10l} + \frac{nl^4}{30l^2} - \frac{nl^4}{30l^3}$.

9. Adeoq; series finita Quartanorum ad seriem totidem maximo Æqualium est ut $\frac{1}{5} + \frac{3}{10l} + \frac{1}{30l^2} - \frac{1}{30l^3}$ ad 1. Quod erat inquirendum.

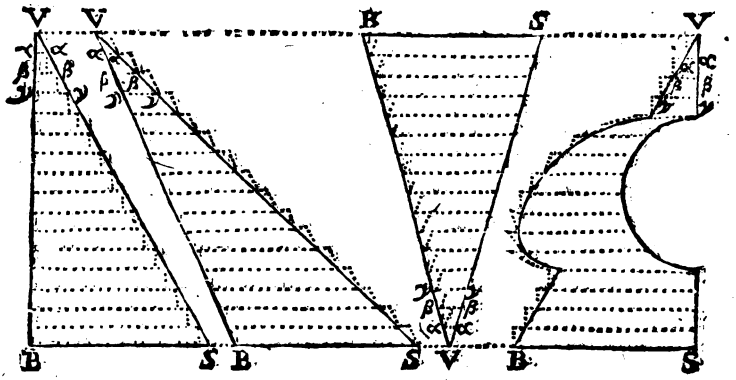
Et pari modo, his cognitis, ratio quam habet ad seriem Æqualium series Quintanorum, invenietur ope characteris in proxima præsentis tabellæ serie: Et deinde, quam habet series Sextanorum, ope characteris seriei proxime subsequentis in hac tabella; & sic deinceps quousq; libet.

Quo melius autem hoc intelligatur, operæ fortasse pretium erit, quæ jam tradita sunt, paulo distinctius aperire: Utut enim ea satis aperte tradidisse nos nobis videamur, fieri tamen potest ut lector illis minus assuetus nonnunquam forsan hæsitet.

Notandum igitur est, nos hic (ut & alibi semper, ubi de finita serie verba fiunt,) numerum terminorum assignare $l+1$ (nempe si terminus primus 0, secundus dicatur 1,) nimirum unitate majorem quam est numerus particularum ex quibus conflatur terminus maximus, hoc est, omnium differentiarum terminorum continue positorum, quarum omnium aggregato terminus maximus æquatur; sive differentiæ illæ sint æquales, ut in serie primanorum, (puta 1,1,1,1, &c, differentiæ numerorum arithmetice proportionalium,) sive crescentes, ut in serie secundanorum, tertianorum, &c. (puta 1,3, 5, 7, &c. differentiæ numerorum quadraticorum, vel 1,7,19,37, &c, differentiæ numerorum cubicorum; &c:) sive etiam decrescentes, ut in serie subsecundanorum, subtertianorum &c; (nam verbi gratia, differentia $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ minor est quam $\sqrt{2} - \sqrt{1}$, atq; hæc minor quam $\sqrt{1} - \sqrt{0}$; & sic in cæteris.) Harum omnium differentiarum (in qualibet serie) numerus l, unitate minor est quam numerus terminorum, ut patet; earumq; omnium aggregatum (propter termini primi 0 nullitatem) est ipse terminus

minus maximus. Ubi autem numerus terminorum dicitur *n*, numerus differentiarum, sive particularum in maximo, erit $n-1$.

Exsemplum esto, series primanorum, quale est Aggregatum parallelogrammorum æquealtorum figuram triangulo inscriptam complentium: quorum si primum dicatur 0, (quippe nullius latitudinis, utut altitudinis ejusdem cum reliquis,)



secundum 1, &c. omnium numerus 16, erunt differentiæ 15, (invicem æquales, nempe 1 ubiq;) & maximum propterea 15. Adeoq; cum in singulis parallelogrammis altitudo communis sit $\frac{1}{16}$ VB (in fig. 1.) & latitudinum incrementum continuum $\frac{1}{16}$ BS: Omnes simul altitudines, hoc est, figuræ inscriptæ altitudo, VB $= \frac{16}{15}$ VB; at omnia simul latitudinum incrementa, hoc est, Basis figuræ inscriptæ, non BS, sed $\frac{15}{16}$ BS, sive BS $- \frac{1}{16}$ BS. Si autem uno adhuc gradu ulterius procedatur, adjuncto infra basem uno adhuc parallelogrammo, erit quidem illius latitudo BS præcise, sed altitudo jam fiet auctior, nempe VB $+ \frac{1}{16}$ VB. Si vero (ut in fig. 2.) sumatur figura ex parallelogrammis circumscripta, erunt tum omnium simul parallelogrammorum altitudines, hoc est, figuræ circumscriptæ altitudo, VB (quam finge jam basi perpendicularem,) tum latitudinum simul omnes particulæ, hoc est, basis figuræ circum-

cumſcriptæ, BS præciſe: at vero jam non ab o ſed 1, ſeries inchoatur: tum ſeries hæc ſupra verticem uno adhuc gradu continuetur (ut inchoetur ab o,) erit jam altitudo ſic aucta $VB + \frac{1}{\infty} VB$, ut patet. Adeoq; figura inſcripta uno infra baſin gradu continuata, & figura circumſcripta continuata uno gradu ſupra verticem, tantundem valent.

Atq; hoc totum in triangulo (atq; eadem ratione in figuris aliis, niſi quod illic incrementa ſint inæqualia) ſatis eſt manifeſtum. Nam (præterquam quod ex jam dictis ſatis pateat) ſi in triangulo ducantur quotlibet rectæ baſi parallelæ (in quarum cenſu & baſin ipſam, & punctum verticis, cenſeri volumus,) eiſq; totidem adjaceant parallelogramma: ſi illa omnia ſupponantur infra ſuas rectas jacere, erit eorum infimum ſubter baſem, ſin ſupra, erit ſupremum ſupra verticem; ſi autem ſupponamus rectas illas neq; in parallelogrammorum ſuorum ſummo neq; in imo jacere, ſed per ipſorum media tranſire, tum eorum tam ſupremum quam infimum erit partim intra partim extra triangulum. Adeoq; quemcunq; ſitum habere ſupponantur illæ rectæ ad ſua parallelogramma, figura illa ex parallelogrammis conſtans (dummodo ab o inchoetur) habebit vel baſin ſuam una parte minorem, vel altitudinem una parte majorem quam habet verum illud triangulum.

Atq; hic quidem ſive exceſſus ſive defectus, quamdiu de finita ſerie agitur, omnino animadvertendus eſt: ubi autem de ſerie infinita agitur, tuto poterit negligi. Cum enim quo plures ſupponantur termini eo minor illa evadat ſive baſium ſive altitudinum differentia, ubi in infinitum proceditur evaneſcet, quippe $\frac{1}{\infty}$ (pars infinite parva) habenda erit pro nihilo; (ea ſaltem adhibita limitatione de qua mox dicetur.) Sic, verbi gratia, ſi triangulo cujus altitudo A, baſis B, inſcribatur figura ex parallelogrammis quorum ſingulorum altitudo $\frac{1}{\infty} A$, & longitudinum incrementa $\frac{1}{\infty} A$, erit inſcriptæ altitudo $\infty \times \frac{1}{\infty} A = A$, baſis non B ſed $B - \frac{1}{\infty} B$: eſt enim altitudinum numerus ∞, at differentiarum $\infty - 1$. Si vero figura ſic inſcripta continuetur uno gradu infra baſem, vel circumſcripta uno gradu ſupra verticem, erit baſis $\infty \times \frac{1}{\infty} B \doteq B$, altitudo $A + \frac{1}{\infty} A$; quippe jam numerus incrementorum eſt ∞, altitudinum $\infty + 1$. Ubi igitur de ſerie finita agitur, per altitudinem & Baſin intelligendæ ſunt altitudo & baſis figuræ ſic adſcriptæ (ſive inſcripta ſit,

ſive

sive circumscripta) non autem istius cui adscribitur; at vero in serie infinita perinde est sive hujus sive illius intelligantur, propter differentiã infinite exiguam, adeoq; evanescentem sive nullam. Nam ∞, $\infty + 1$, $\infty - 1$, perinde sunt. Et quemadmodũ ubi polygonum infinitorum laterum, pro circulo habetur, perinde est sive inscriptum sive circumscriptum intelligatur, (hoc est, sive supponatur circuli radius æqualis rectæ quæ a centro ad angulos, sive illi quæ a centro ad medium lateris ducitur, quarum differentia, propter latera numero infinita, est infinite exigua:) sic in adscriptionibus nostris perinde est (propter differentiam infinite parvam) an inscriptæ an circumscriptæ altitudo aut basis sumatur pro vera. Et quidem ut in polygono infinitorum laterum inscripto & circumscripto, latera supponuntur invicem æqualia, hoc est, ejusdem arcus sinus rectus & tangens æquales tam invicem quam ipsi arcui, ita & hic figuræ ex parallelogrammis inscriptæ & circumscriptæ tam bases quam altitudines supponendæ sunt æquales tam inter se quam illius cui adscribuntur; hoc est, si accurate loqui libeat, non nisi infinite exigua sui parte differre.

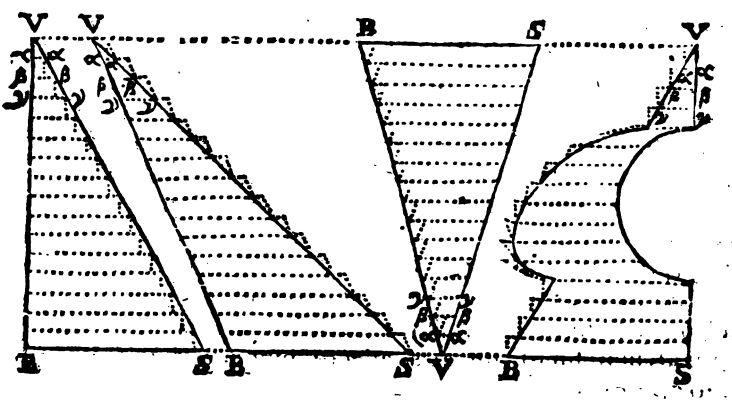
Eodem modo, in fig. prop. 5. Figura ex similibus sectoribus spirali inscripta, si sectorum numerus sit finitus, erit series finita, cujus terminus primus est 0, ultimus verò sectorum inscriptorum ultimus (cujus radius est una parte minor, quam ultimi circumscriptorum,) omniumq; horum sectorum arcus simul sumpti, æquantur semissi arcus circuli contermini, nempe qui est figuræ ex sectoribus conflatæ cõterminus, non qui cõterminus est veræ spirali; at si numerus sectorum (prout ibi supponitur) supponatur infinitus, erunt adhuc omniũ sectorum arcus simul sumpti, æquales semissi arcus circuli contermini, nempe contermini figuræ ex his infinitis sectoribus conflatæ, qui tamen vel ille ipse est cum contermino veræ spirali, vel ipso saltem infinite-exigua sui parte (hoc est, nihilo,) minor. Si vero pro sectoribus inscriptis sumantur circumscripti, arcus circuli contermini erit una sui parte augendus (sive finita sive infinita, pro numero sectorum) ut ipsius semissis æqualis habeatur omnibus sectorum arcubus simul sumptis, adeoq; supponendus est incepisse uno gradu ante initium veræ spiralis, ut primi sectoris arcus sit 0: nam in arithmetice proportionalibus, nisi primus terminus sit 0, aggregatum omnium non erit æquale semissi ul-

Digitized by Google

timi in numerum terminorum ducti.

Quod autem de his figuris oſtenſum eſt, intelligendum erit (mutatis mutandis) de quibuſvis aliis, nempe numerum terminorum (ſi ab 0 incipiatur) eſſe unitate majorem quam eſt numerus differentiarum, ſive particularum ex quibus maximus conſtat; (ſive æquales ſint illæ differentiæ ſive inæquales;) adeoq; ſi adſcriptæ figuræ (ſive ſit inſcripta ſive circũſcripta) baſis ſumatur æqualis baſi figuræ propoſitę cui adſcribitur (ſive continuando inſcriptã uno gradu infra baſin, vel circumſcriptã uno gradu ſupra verticem) erit iſtius altitudo una parte major quam altitudo hujus, (ſive pars illa finita ſit ſive infinita;) ubi autem numerus partium altitudinis hujus ſupponitur ∞, erit in illa $\infty + 1$; vel ſi hujus altitudo A, erit illius $A + \frac{1}{\infty} A$, ſi illius A (quod nos ponere ſolemus) erit hujus $A - \frac{1}{\infty} A$, quod tamen (in infinitis) tantundem valet ob differentiam infinite parvam.

Dum vero differentiam infinitè parvam, pro nulla habendam dicimus: caute hoc accipiendum eſt; neq; enim id ubiq; obtinet, ſed aliquando lapſui occaſionem præbet. Cum enim infinite parvum infinities multiplicatur, aſſurgit nonnunquam quantitas ſatis magna, nempe illa ipſa cujus illa fuit aliquota pars utut infinite parva: Nam $\frac{1}{\infty} \times \infty = 1$ & $\frac{1}{\infty} A \times \infty = A$.



Exſemplum oſtendimus in Schol. prop. 13. Si enim (in fig. 1 & 2) concluderet quis, quoniam infinitorum parallelogrammorum latera (rectam VB conſtituentia) & trapeziorum latera (complentia rectam VS) ſigillatim ſumpta non niſi differentiâ infinitè parvâ ab invicem differant (cum tam hæc quam illa ſint infinite parva, quippe $\frac{1}{\infty}$ rectarum VB, VS,) eam igitur contemnendam eſſe, ipſaq; parallelogrammorum atq; trapeziorũ latera dicenda æqualia, & propterea (cum ex æqualium æqualibus additione aggregata ſint æqualia) infinita hæc infinitis illis æqualia, hoc eſt, totam VS, æqualem eſſe toti VB: manifeſtus eſſet paralogiſmus, (in quem tamen lapſus eſt admodum proclivis, ni caveatur:) Quamvis enim differentiæ ſint ſigillatim infinite-parvæ, (nempe $\frac{1}{\infty}$ VS — $\frac{1}{\infty}$ VB) omnium tamen (numero infinitorum) aggregatum ſat notabilem habet magnitudinem, nempe VS — VB.

At interim eadem parallelogramma atq; trapezia (ſi aream ſpectemus) non modo ſigillatim ſumpta differentiam habent infinitè parvam; ſed & eorum aggregatum & aggregatum horum (hoc eſt infinita illa parallelogramma ſimul ſumpta, atq; infinita hæc trapezia) differentiâ non niſi infinite parvâ ab invicem differunt: quod de ipſorum lateribus non obtinet.

Diſcriminis ratio hæc eſt: Quoniam ubi de lateribus comparandis agitur, quamvis in binis quibuſlibet reſpective ſumptis differentia minor eſt quo major eſt omnium numerus, at in eadem ſemper ratione qua ſingulæ differentiæ minuuntur, differentiarum numerus augetur; adeoq; differentiarum aggregatum dividendo non minuitur. At ubi de areis agitur, non modo binorum (trapezii & parallelogrammi) reſpective ſumptorum differentiæ ſingulæ minuuntur ſed & omnium aggregatum; & quidem quo plures ſint differentiæ eò minus eſt omnium aggregatum, donec tandem non modo a ſingulis ſingula, (quod demonſtraſſe non ſufficeret) ſed & ab omnibus omnia differant ſpacio infinite-parvo, ut ex demonſtrationibus liquet. Atq; hæc aliquanto fuſius notaſſe operæ pretium duxi, quoniam hic loci nonnullos lapſui proclives animadverti.

Ne autem hinc aliquid periculi quis ſuſpicetur dum nos altitudinem figuræ cujuſlibet accuratam, atq; eandem aliquota ſui parte infinite-parva auctam, perinde habemus: hoc unum ſat ſecuros reddat, quod, cæteris paribus, auctio altitu-

Digitized by Google

dinis figuræ cujuslibet (sive planæ sive solidæ) non nisi in eadem ratione augeti plus aream sive magnitudinem; adeoq; ubi altitudinis augmentum est non nisi aliquota sui parte infinite-parva, erit etiam totius figuræ non nisi in eadem ratione auctio; hoc est aliquota parte sui infinite parva, sive $\frac{1}{\infty}$ totius figuræ; quod (cum non infinities, sed semel tantum sumatur) omni assignabili spacio minus erit, adeoq; pro nullo habendum.

Sin tandem quæratur, cur ego figurarum inscriptionem, potius quam circumscriptionem, eligerim; adeoq; ab 0 potius quam ab 1, ubiq; fere inchoaverim? præsertim cum figura circumscripta (non uno gradu supra verticem continuata, ut ab 0 incipiat, sed potius ab 1) eandem habeat præcise & basin & altitudinem cum ea cui adscribitur, sive in serie primanorum, sive secundanorum, aut aliorum sequentium; item sive finita sit sive infinita series?

Dicimus: Posse quidem id quod agimus utrovis modo fieri, nempe vel per figurarum inscriptionem vel circumscriptionem (quod & supra monuimus ad prop. 43. quæ toti huic Scholio ansam dedit, cujus quidem pars magna tradi citius non potuit, ut quæ a propositione proxime præcedente dependeat, (adeoq; verbi gratia, series primanorum indifferenter designari, per 1, 2, 3, &c. vel per 0, 1, 2, &c. nam terminus primus 0 reliquorum quantitati nihil addit. Et quidem ego jam olim utroq; modo lemmata mea ordinaveram, ut ut alterutrum demonstrationibus nostris sufficeret, quapropter lectorem utroq; onerandum non censui; præsertim cum ego Series infinitas maxime spectabam, finitis vix aliter quam lemmatum instar, ad infinitorum theoremata usus.

At interim figuræ circumscriptæ, si res accuratius perpendatur, non magis congruunt figuris illis quibus circumscribuntur, quam inscriptæ: Nam verbi gratia, inscripta cum exposita congruit altitudine & verticis latitudine, sed quoad basin (hoc est latitudinem in imo) differt; eadem inscripta uno infra basin gradu continuata (vel circumscripta sic continuata supra verticem) convenit expositæ quoad basin & verticis latitudinem sed quoad altitudinem differt; circumscripta vero (non continuata) convenit quidem expositæ quoad basin & altitudinem, sed non quoad latitudinem verticis, quippe in altera est 0 in altera 1.

Cum

Digitized by Google

Cum itaq; admodum ſe indifferenter habebant ad negotium noſtrum figuræ inſcriptæ & circumſcriptæ; mallem ego ſeries noſtras ab 0 quam ab 1 inchoare: partim quod illud, utut inſcriptionem potius referre videatur, utriſq; tamen accommodari poſſit, (ut jam dictum eſt,) prout vel ſupra verticem vel infra baſin ſupponatur continuari: partim quod hoc pacto (propter minimi termini nullitatem) extremorum aggregatum idem ſit atq; terminus maximus: præſertim vero ut poſſim, ſine longo verborum ambitu, ſeriei primanorum appellatione comprehendere non modo 0,1,2,3, &c, ſed & 0, 2, 4, 6, &c, vel 0,3,6,9, &c, vel 0,4,8,12,&c, ſimileſq; alias ab 0 inchoatas quicunq; ſit terminus ſecundus; & ſub ſerie ſecundanorum nomine, non modo 0, 1,4,9, &c. ſed & 0, 2,8,18, &c, vel 0, 3, 12, 27, &c. ſimileſq; : & pariter in ſeriebus ſequentibus.

Siquis autem mallet ab 1, ſeries inchoare, poterit ad hunc modum lemmata ordinare.

Ad ſeriem primanorum;

$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{0+1+2}{2+2+2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+2}{3+3} = \frac{1}{2}$

$\frac{0+1+2+3}{3+3+3+3} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3}{4+4+4} = \frac{1}{2}$

$\frac{0+1+2+3+4}{4+4+4+4+4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3+4}{5+5+5+5} = \frac{1}{2}$

$\frac{0+1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5+5} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3+4+5}{6+6+6+6+6} = \frac{1}{2}$

&c. $\qquad$ &c.

Digitized by Google

Aut etiam,

$\frac{0+1}{2+2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{1+2}{2+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

$\frac{0+1+2}{3+3+3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3}{3+3+3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$

$\frac{0+1+2+3}{4+4+4+4} = \frac{3}{8} - \frac{1}{8}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3+4}{4+4+4+4} = \frac{5}{8} + \frac{1}{8}$

$\frac{0+1+2+3+4}{5+5+5+5+5} = \frac{1}{2} - \frac{1}{10}$ $\qquad$ $\frac{1+2+3+4+5}{5+5+5+5+5} = \frac{3}{5} + \frac{1}{10}$

&c. $\qquad$ &c.

Ad seriem Secundanorum;

$\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$

$\frac{0+1+4}{4+4+4} = \frac{5}{12} + \frac{1}{12}$ $\qquad$ $\frac{1+4}{9+9} = \frac{5}{12} - \frac{1}{12}$

$\frac{0+1+4+9}{9+9+9+9} = \frac{7}{18} + \frac{1}{18}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9}{16+16+16} = \frac{7}{24} - \frac{1}{24}$

$\frac{0+1+4+9+16}{16+16+16+16+16} = \frac{3}{10} + \frac{1}{240}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9+16}{25+25+25+25} = \frac{15}{40} - \frac{1}{40}$

&c. $\qquad$ &c.

Aut etiam

$\frac{0+1}{4+4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16}$ $\qquad$ $\frac{1+4}{4+4} = \frac{5}{8} + \frac{1}{16}$

$\frac{0+1+4}{9+9+9} = \frac{5}{18} - \frac{1}{162}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9}{9+9+9} = \frac{7}{18} + \frac{1}{162}$

$\frac{0+1+4+9}{16+16+16+16} = \frac{7}{32} - \frac{1}{512}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9+16}{16+16+16+16} = \frac{15}{32} + \frac{1}{512}$

$\frac{0+1+4+9+16}{25+25+25+25+25} = \frac{11}{50} - \frac{1}{1250}$ $\qquad$ $\frac{1+4+9+16+25}{25+25+25+25+25} = \frac{27}{50} + \frac{1}{1250}$

&c. $\qquad$ &c.

Ad

Ad seriem Tertianorum.

$\frac{0+1}{1+1}\frac{1}{1} = +\frac{1}{4}$ $\qquad$ $\frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{8}$

$\frac{0+1+8}{8+8+8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ $\qquad$ $\frac{1+8}{27+27} = \frac{1}{8} + \frac{1}{24}$

$\frac{0+1+8+27}{27+27+27+27} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ $\qquad$ $\frac{0+1+8+27}{64+64+64+64} = \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$

$\frac{0+1+8+27+64}{64+64+64+64+64} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ $\qquad$ $\frac{1+8+27+64}{125+125+125+125} = \frac{1}{4} - \frac{1}{20}$

&c. $\qquad$ &c.

Et similiter ad series sequentes, quibus recensendis abstineo ne sim prolixus. Poterit, si lubet, lector non magno negotio vel hæc ipsa lemmata in theoremata formare, vel alia his similia sequentibus seriebus aptare, si ad ea quæ jam tradidimus attenderit.

Sed & alius adhuc est (si varietate lector delectetur) series has ordinandi modus, qui etiam aliquando non minus erit accommodus: Si nempe nec ab 0 (ut in figuris inscriptis) nec ab 1 (ut in figuris circumscriptis) sed ab intermedia quantitate, puta $\frac{1}{2}$, series inchoetur, (adeoq; figuram representet quæ inscriptæ & circumscriptæ est intermedia, sive major quam inscripta & minor quam circumscripta:) Ut sit, verbi gratia, series primanorum $\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} + 2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2}$ &c. vel (quod eodem recidit) $1+3+5+7$ &c. Quo casu lemma sic erit ordinandum, pro serie primanorum.

$\frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}}{2+2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3}{4+4} = \frac{1}{2}$

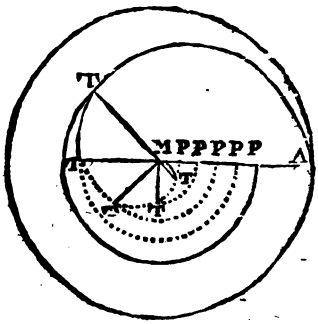
$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}}{3+3+3} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3+5}{6+6+6} = \frac{1}{2}$

$\frac{\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{2}}{4+4+4+4} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\frac{1+3+5+7}{8+8+8+8} = \frac{1}{2}$

&c. $\qquad$ &c.

Atq;

Atq; hic quidem modus omnium optime convenit prop. 15, 16, ubi figuram Spirali adjacentem cum Parabolica comparamus. Nam si, in figura spirali, ductis quotlibet rectis MT angulos facientibus continuos invicem æquales, si in singulis spacies sectores inscribi supponantur, erunt eorum arcus, ut 0, 1, 2, 3, &c; sin circumscribi, ut 1, 2, 3, 4, &c; si vero ita abscribi ut sectorum arcus a spirali bisecentur, erunt ut $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, &c, vel ut 1, 3, 5, 7, &c. (nempe ut differentiæ numerorum quadraticorum:) adeoq; si arcus illi (sive numero infiniti sive finiti, quamvis ibidem de infinitis tantummodo verba facta sint, adeoq; hanc curiositatem illic omittendam duxerim,) supponantur in rectum extendi & invicem continuari, ut fiant totidem segmenta diametri parabolæ (continue posita;) unde evadant diametri interceptæ 1, 4, 9, 16, &c. (nam $1+3=4$, $1+3+5=9$, &c;) quibus conveniant ordinatim-applicatæ (quippe in diametrorum ratione subduplicata) quæ erunt ad invicem, ut 1, 2, 3, 4, &c, hoc est ut ipsæ rectæ MT, MT, &c, in figura spirali vera per similium sectorum terminos transeuntes.



Atq; hoc pacto comparare licet, non modo figuram ex sectoribus numero infinitis (quod nos illic fecimus) sed etiam ex numero finitis conflatam, spirali adjacentem, cum figura ex totidem parallelogrammis adjacente parabolæ. Quod quidem (fine nova figura) satis intelligi poterit. Si illi sectorum arcus ponantur $1a, 3a, 5a$, &c; radii vero (ipsis proportionales) $2r, 6r, 10r$, &c; erunt sectores $1ar, 9ar, 25ar$, &c. (nempe semisses parallelogrammorū radiis & arcubus respectivis contentorū.) Sumptis item in parabolæ diametro continuis segmentis $1a, 3a, 5a$, &c. adeoq; diametris interceptis $1a, 4a, (=1a+3a,) 9a (=4a+5a)$ &c, & ordinatim-applicatis quæ illis diametris conveniant (in diametrorum ratione subduplicata) $2r, 4r, 6r$, &c, (quæ spacia abscindant non æque alta, sed quorum altitudines sint arithmetice proportionales, ut 1, 3, 5, &c. ut patet;) parallelogramma spaciis illis inscripta erunt $1a \times 0r$, $3a \times 2r$,

Digitized by Google

$5a \times 4r$, &c, vel $0ar$, $6ar$, $20ar$, &c; circumſcripta, erunt $1a \times 2r$, $3a + 4r$, $5a \times 6r$, &c, vel $2ar$, $12ar$, $30ar$, &c; his autem intermedia partim inſcripta partim circumſcripta (quæ nempe eam habent latudinem quæ eſt arithmeticè media inter duas ordinatim applicatas ſpatium terminantes) vel (quod tantundem valebit) inſcripta trapezia, erunt $1a \times 1r$, $3a \times 3r$, $5a \times 5r$, &c, vel $1ar$, $9ar$, $25ar$, &c, expoſitis ſectoribus ſigillatim æqualia: iis nempe quorum arcus ſunt parallelogrammorum altitudinibus (hoc eſt, ſegmentis diametri parabolæ) æquales, radii vero latitudinum parallelogrammorum dupli: vel, ſi ſectorum radii ſint parallelogrammorum illorum latitudinibus æquales, erunt parallelogramma ſectorum dupla.

Sed tempus eſt ut prolixo Scholio finem imponam; quod, cur in hunc locum rejecerim, ſupra dictum eſt.

PROP. CLXXXIII. *Theorema.*

LAtus numeri Figurati cujuſlibet, in qualibet ſerie Tabellæ expoſitæ (prop. 132.) quouſq; libet continuandæ; ad ſuum illum numerum Figuratum; rationem habet cognitam.

Nempe eam quam indicat prop. præced.

PROP. CLXXXIV. *Theorema.*

ET *propterea*, Series ſequentes in præmiſſa tabella quouſq; libet continuata, non erit difficile interpolare.

Nempe, invento per prop. 182, cujuſq; proprio charactere, fiat interpolatio ut in prop. 175, 176, 181.

Digitized by Google

Tabella vero, ut dictum est, interpolata sic se exhibebit.

Numeri

Monadici	Laterales.	Triangulares	Pyramidales	Triangulipyram.
1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	6	10	15
1	4	10	20	35
1	5	15	35	126

$$\frac{l^2+l}{2} \qquad l \qquad l^1$$

$$\frac{l^3+3l^2+2l}{6}$$

$$\frac{l^4+6l^3+11l^2+6l}{24}$$

Digitized by Google

Vel aliter expeditus. Postquam per prop. 170, 175. &c. interpolatio serierum tam transversarum quam erectarum aliquousq; incepta est, licet eam ulterius continuare quousq; libet sola additione numerorum jam inventorum; nam non modo numeri tabellæ prop. 132. (prout ibidem monuimus) sed & qui interpolatione immiscentur, fiunt ex duobus aliis additis, altero superius altero ad sinistram, (non quidem proximis, ut in prop. 132. sed, propter loca jam interpolata,) post unum locum interjectum positis Ut animadvertenti patebit.

Quod autem de interpolatione unius in singulis spaciis loci, in propositionibus aliquot præcedentibus jam dictum est, etiam ad duorum vel trium pluriumve interpositionem, mutatis mutandis, facile accommodari poterunt.

SCHOLIUM.

Notandum hic, totum hoc interpolationis negotium, huc usq; præstitum, perfici posse (etiam sine inventis cujusq; seriei propriis characteribus) ope monitorum quæ habentur in Scholiis prop. 126. & 154. Interpolatis nempe primo seriebus erectis, & istis deinde interpolationibus in series item transversas relatis. Verum cum singularum serierum characteres investigare, res esset non injucunda, & lectori forsan non ingrata: placuit ea potius quam habetis methodo incedere.

Cum autem huc perventum est, patet, intercalatione facta in singulis seriebus tam erectis quam transversis Tabellæ prop. 132. novas jam emersisse series ipsis interpositas: nondum tamen completas, sed hiantes. Et quidem locus ille (nota □ insignitus) quem quam maxime suppletum vellem, manet adhuc vacuus. Si autem vel unus ex vacuis illis locis suppleri datum sit, & reliqui non difficulter suppleri poterunt; ut ex prop. 188. deinceps patebit.

Cum vero Tabella prop. 132. jam habetur novis seriebus interpolata, ut interjectæ series suos habeant titulos juxta tenorem illius tabellæ accommodatos, observanda est hæc sequens Propositio.

Digitized by Google

PROP. CLXXXV. *Theorema.*

SI ſeriebus Tabellæ prop. 132. novæ interſerantur ſeries, ut ſuum quæq; debitum ſortiatur titulum; obſervandi ſunt indices poteſtatum illic appoſitarum; eæq; poteſtates ſunt interponendæ quarum indices cum illarum indicibus debitam analogiam retinent.

Puta, cum poteſtates, in ſummitate Tabellæ iſtius, repertæ indices habeant, 0, 1, 2, 3, 4 &c. interpolatione unius loci ubivis jam facta, poteſtatum apponendarum indices erunt $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4. &c.

Item cum poteſtatum illic ad marginem appoſitarum indices ſint $\frac{1}{0}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. ſeu $\frac{2}{0}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{8}$, &c. poteſtatum jam appoſitarum indices erunt $-\frac{2}{1}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{8}$, &c. (vel pro $-\frac{2}{1}$, ſubſtituas, $-\frac{2}{2}$, vel $-\frac{2}{4}$, vel -2, tantundem enim valent.)

Adeoq; Tabella illa jam interpolata ſic ſe habebit.

Si infinita ſeries Æqualium multetur analoga ſerie Primanorum, vel Secundanorum, aut Tertianorum, &c. Reſidua, eorumq; Quadrata, Cubi, &c. eam rationem habebunt ad Æqualium ſeriem congruam, quam habet unitas ad numeros Tabellæ ſequentis. Nempe

Serici

Seriei æqualium multitatæ serie

	Recip. √q Resid.	Æqualia.	√q Residuorum	Residua.	√q. Cuborum.	Quadrata.	√q. Quintan.	Cubi.	√q. Septiman.	Biquadrata.
Recipr: Quadrat.	∞	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{15}{48}$		$\frac{105}{384}$
Nullâ	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
Quadratorum.		1	□	$1\frac{1}{2}$		$1\frac{7}{8}$		$2\frac{7}{48}$		$2\frac{177}{384}$
Primanorum.	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5
Quadr. Subtert.		1		$2\frac{1}{2}$		$4\frac{3}{8}$		$6\frac{27}{48}$		$9\frac{9}{384}$
Subsecundanor.	$\frac{3}{8}$	1	$1\frac{7}{8}$	3	$4\frac{3}{8}$	6	$7\frac{7}{8}$	10	$12\frac{1}{8}$	15
Qu: Subquintan.		1		$3\frac{1}{2}$		$7\frac{7}{8}$		$14\frac{21}{48}$		$23\frac{777}{384}$
Subtertianorum.	$\frac{15}{48}$	1	$2\frac{9}{48}$	4	$6\frac{27}{48}$	10	$14\frac{21}{48}$	20	$26\frac{129}{48}$	35
Q: Subseptiman.		1		$4\frac{1}{2}$		$12\frac{3}{8}$		$26\frac{189}{48}$		$50\frac{1015}{384}$
Subquartanor.	$\frac{105}{384}$	1	$2\frac{177}{384}$	5	$9\frac{9}{384}$	15	$23\frac{177}{384}$	35	$50\frac{1015}{384}$	70

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

Et sic deinceps.

SCHOLIA.

Atq; hic jam notare licet alteram etiam seriem earum quarum in Scholiis prop. 165 & 168. nempe eam quam prop. 118 & 121 prius tradideram, etiam in hâc ipsa Tabella inexspectatò prodire: in serie nempe transversa tertia.

PROP. CLXXXVI. *Theorema.*

HInc patet, *quod* Series infinita radicum universalium, ad seriem totidem Æqualium, rationem habere potest satis explicabilem.

Nempe per Tabellam prop. præced. erit.

Digitized by Google

$\sqrt{q}$ Resid.	Residua	$\sqrt{q}$ Cuborum.
$\sqrt{u:\sqrt{R}-\sqrt{a}:}$	$\sqrt{R}-\sqrt{a}$	$\sqrt{u:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^2}a+3\sqrt{R}a^2-\sqrt{a^3}:}$
$\sqrt{u:\sqrt{R}-\sqrt{b}:}$	$\sqrt{R}-\sqrt{b}$	$\sqrt{u:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^2}b+3\sqrt{R}b^2-\sqrt{b^3}:}$
$\sqrt{u:\sqrt{R}-\sqrt{c}:}$	$\sqrt{R}-\sqrt{c}$	$\sqrt{u:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^2}c+3\sqrt{R}c^2-\sqrt{c^3}:}$
&c. ad	&c ad	&c usq; ad
$\sqrt{:\sqrt{R}-\sqrt{R}:}$	$\sqrt{R}-\sqrt{R}$	$\sqrt{u:\sqrt{R^3}-3\sqrt{R^3}+3\sqrt{R^3}-\sqrt{R^3}:}$
$\frac{2}{3}A\sqrt{qqR}$	$\frac{1}{2}A\sqrt{R}$	$\frac{2}{3}A\sqrt{qqR^3}$

$\sqrt{q}$ Residuorum.	Residua	$\sqrt{q}$. Cuborum.
$\sqrt{u:\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}a}$	$\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}a$	$\sqrt{u:\sqrt{^3}R^3-3\sqrt{^3}R^2a+3\sqrt{^3}Ra^2-\sqrt{^3}a^3:}$
$\sqrt{u:\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}b:}$	$\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}b$	$\sqrt{u:\sqrt{^3}R^3-3\sqrt{^3}R^2b+3\sqrt{^3}Rb^2-\sqrt{^3}b^3:}$
$\sqrt{u:\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}c:}$	$\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}c$	$\sqrt{u:\sqrt{^3}R^3-3\sqrt{^3}R^2c+3\sqrt{^3}Rc^2-\sqrt{^3}c^3:}$
&c ad	&c ad	&c usq; ad
$\sqrt{u:\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}R:}$	$\sqrt{^3}R-\sqrt{^3}R$	$\sqrt{u:\sqrt{^3}R^3-3\sqrt{^3}R^2R+3\sqrt{^3}RR^2+\sqrt{^3}R^3:}$
$\frac{48}{120}A\sqrt{^4}R$	$\frac{1}{4}A\sqrt{^3}R$	$\frac{48}{120}A\sqrt{^4}R^3=\frac{48}{120}A\sqrt{R}$
vel $\frac{16}{40}A\sqrt{^3}R$		$\frac{16}{120}A\sqrt{^3}R^4=\frac{16}{120}A\sqrt{R}$

Et pari modo in quibuſvis aliis iſtius Tabellæ ſeriebus in quibus interpolatio perfecta eſt.

Adeoq; nihil deeſt ad idem in reliquis ſeriebus perficiendum (& ſpeciatim ad quadrandum circulum) niſi ut methodus ſupplendi loca vacua reperiatur, vel (quod eodem recidit) ut ſerierum iſtarum proprius character inveniatur. Et quidem quamvis non obvium ſit interpoſitarum ſerierum characteres invenire, tamen, quam habent illi ad invicem rationem, ex prop. ſeq. innoteſcet: ut ſiqua poſſimus arte eorum unum invenire, ſtatim invenientur & reliqui.

PROP.

Digitized by Google

PROP. CLXXXVII. *Theorema.*

IN Tabella prop. 184. Ut, posito seriei secundæ, hoc est, parium primæ, characterе 1, reliquarum ex paribus characteres fiunt continuâ multiplicatione numerorum $1 \times \frac{l}{1} \times \frac{l+1}{2} \times \frac{l+2}{3} \times \frac{l+3}{4}$ &c. (ut dictum est prop. 178.) vel (quod tantundem valet) $1 \times \frac{2l}{2} \times \frac{2l+2}{4} \times \frac{2l+4}{6} \times \frac{2l+6}{8}$ &c. sic, posito seriei primæ (imparium) characterе A, reliquatum ex imparibus characteres fiunt continuâ multiplicatione numerorum $A \times \frac{2l-1}{1} \times \frac{2l+1}{3} \times \frac{2l+3}{5} \times \frac{2l+5}{7}$ &c. Adeoq; ex horum uno cognito innotescent statim & reliqui.

Nam id postulat analogia progressionis Arithmeticæ, quæ & in Numeratoribus & in Denominatoribus conspicitur. Atq; id ipsum comprobat inductio locorum omnium qui complentur; ut non sit dubium quin & idem de vacuis credendum sit.

Adeoq; ex imparium characteribus, uno cognito innotescent etiam & reliqui.

PROP. CLXXXVIII. *Theorema.*

IN singulis seriebus Tabellæ prop. 184. Si primus terminus dicatur A, secundus (hoc est, primus parium,) 1. Reliqui omnes ejusdem seriei (tam pares quam impares) fiunt continua multiplicatione numerorum sequentium. Nempe

Impares

Impares.	Pares.
In prima $A \times \frac{0 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c.}$	$1 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c}$
In secund. $A \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c.}$	$1 \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c}$
In tertia $A \times \frac{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c.}$	$1 \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \&c}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c}$
In quarta $A \times \frac{3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c.}$	$1 \times \frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \&c}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c}$
In quinta $A \times \frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12 \&c}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c.}$	$1 \times \frac{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c.}$
In sexta $A \times \frac{5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \&c.}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c.}$	$1 \times \frac{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c.}$
In septim. $A \times \frac{6 \times 8 \times 10 \times 12 \times 14 \&c}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c}$	$1 \times \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c.}$
In octava $A \times \frac{7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \&c}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c.}$	$1 \times \frac{8 \times 10 \times 12 \times 14 \times 16 \&c.}{2 \times 4 \times 6 \times 8 \times 10 \&c.}$

Et sic deinceps.

Probabitur hæc ex præcedente. Vel etiam (ut præcedens) ex analogia progressionis Arithmeticæ Et quidem inductione comprobatur in locis omnibus repletis; ut non sit dubium quin idem de vacuis etiam credendum sit.

Si quis autem hæsitat de imparibus seriei primæ, (quos aio fieri ex continua multiplicatione numerorum $A \times \frac{0 \times 2 \times 4 \times 6 \times 8 \&c}{1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \&c}$.) nempe, ne 0 ciphra quæ istic conspicitur, totam continuam multiplicationem, quantacunq; fuerit, penitus destruat, faciatq; omnes istius seriei terminos evanescere in 0 ciphram seu Nihil: Sciendum est, inde huic malo cautum esse quod terminus A in ista serie sit ∞ Infinitum (prout superius ostendimus in Scholiis ad prop. 166.) adeoq; nisi sequeretur 0 ad ipsius ∞ vires minuendas) excrevissent omnes istius seriei termini in ∞ Infinitum. Sed eorum alterum alterius malo medetur commode. Quamvis enim ∞ × 0 non aliquem

quem determinate numerum designet (et propterea nihil inde certi de reliquis quantitatibus concludi possit,) potest tamen quasi virtualiter cujusvis numeri vices subire. Nam quicunq; numerus per ∞ dividatur, quotientem dabit 0, et contra. Puta ∞)1(0.0) 1(∞.∞)2(0.0)2(∞.∞)3(0.0)3(∞. Et sic de quovis alio: Et propterea (cum *Divisor* in *Quotientem* ductus restituere debeat numerum *Dividendum*) esset ∞ × 0 = 1, vel ∞ × 0 = 2, vel ∞ × 0 = 3; Et sic de quovis alio numero.

PROP. CI XXXIX. *Theorema.*

Hinc sequitur, quod Si ex Tabellæ prop. 184. locis vacuis unus quilibet numero noto suppleatur, erunt & reliqui omnes cogniti.

Verbi gratiâ; si numerus hâc notâ □ designatus supponatur cognitus, reliqui omnes etiam cognoscentur; qui nempe eam habent ad illum rationem quæ hic subtus indigitatur.

∞	1	$\frac{1}{2}$□	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$□	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{15}$□	$\frac{1}{48}$	$\frac{8}{315}$□	$\frac{105}{3840}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\frac{1}{2}$□	1	□	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$□	$\frac{15}{8}$	$\frac{8}{5}$□	$\frac{105}{48}$	$\frac{64}{35}$□	$\frac{945}{384}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{4}{3}$	3	$\frac{7}{2}$	4	$\frac{9}{2}$	5
$\frac{1}{3}$□	1	$\frac{4}{3}$□	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$□	$\frac{35}{8}$	$\frac{64}{15}$□	$\frac{315}{48}$	$\frac{128}{21}$□	$\frac{3465}{384}$
$\frac{1}{8}$	1	$\frac{15}{8}$	3	$\frac{35}{8}$	6	$\frac{63}{8}$	10	$\frac{99}{8}$	15
$\frac{4}{15}$□	1	$\frac{8}{5}$□	$\frac{7}{2}$	$\frac{64}{15}$□	$\frac{63}{8}$	$\frac{128}{15}$□	$\frac{693}{48}$	$\frac{256}{35}$□	$\frac{3003}{384}$
$\frac{1}{48}$	1	$\frac{105}{48}$	4	$\frac{315}{48}$	10	$\frac{693}{48}$	20	$\frac{2277}{48}$	35
$\frac{8}{315}$□	1	$\frac{64}{35}$□	$\frac{9}{2}$	$\frac{128}{21}$□	$\frac{99}{8}$	$\frac{256}{35}$□	$\frac{2277}{48}$	$\frac{10304}{384}$□	$\frac{43945}{3840}$
$\frac{105}{3840}$	1	$\frac{945}{384}$	5	$\frac{3465}{384}$	15	$\frac{9009}{384}$	35	$\frac{43945}{3840}$	70

A

1

$A \times \frac{2l-1}{1}$

$l = \frac{2l+0}{2}$

$A \times \frac{4l^2-1}{3}$

$\frac{l^2+l}{2} = \frac{4l^2+4l}{8}$

$A \times \frac{8l^3+12l^2-2l-3}{15}$

$\frac{l^3+3l^2+2l}{6} = \frac{8l^3+24l^2+16l}{48}$

$A \times \frac{16l^4+64l^3+56l^2-16l-15}{105}$

$\frac{6l^4+6l^3+11l^2+6l}{24} = \frac{16l^4+96l^3+176l^2+96l}{384}$

Totus

Digitized by Google

Totus processus demonstratur ex prop. præced.

Notandum autem & hic numerum quemvis intermedium aggregatum esse ex duobus altero sursum altero ad dextram (non proximis, sed post unum intermissum,) positis.

Cujusq; seriei characterem (quatenus per prop. 181 innotescit,) libuit etiam adjungere, quo melius perspiciat lector quousq; rem perduximus.

SCHOLIUM.

Atq; hactenus quidem rem perduxisse videamur satis feliciter. Verum hic tandem hæret aqua. Neq; enim video quo pacto possim vel quantitatem □ reperire, vel characterem seriei A. (Ec propterea, nec characteres serierum imparium penitus assequi, licet eorum ad invicem rationes cognoscantur, nec imparium serierum locos impares, quamvis & horum etiam cognoscantur quas habent ad invicem rationes.) Quanquam enim si numeri laterales sint integri, puta 1, 2, 3, 4, &c. nota erit quantitas A, puta 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. non tamen facile est deprehendere quo pacto horum numerorum ad suos respectivæ numeros laterales ratio possit unâ aliqua æquatione explicari: unde & reliquis lateribus (locorum imparium) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, &c. accommodari possit sua quantitas A. Quanquam enim hinc spes non exigua visa est affulsisse, lubricus tamen quem præ manibus habemus Proteus tam hic quam superius non raro elapsus, spem fefellit. Quem autem & hic comprimendi vultum ostenderit, non erit fortassis ingratum apposuisse. Nempe ----

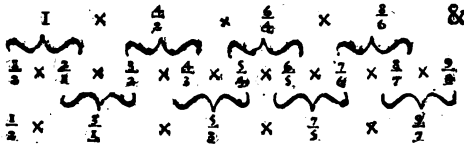
PROP. CLXXXX. *Theorema.*

IN serie quarta, (sive parium secunda,) cujus numeri alternè sumpti (in locis paribus) 1, 2, 3, 4, 5, &c. fiunt continua multiplicatione numerorum seu rationum $1 \times \frac{3}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{4}$, &c. seu $1 \times \frac{4}{2}$ $\frac{4}{4} \times \frac{6}{6} \times \frac{10}{8}$ &c; &, (in locis imparibus,) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{5}$, &c. ex multiplicatio $\frac{1}{2} \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{5}$, &c. Si, propter intercalationem unius in singulis spaciis numeri, (ut ex locis tam paribus quam imparibus intermistis una fiat series,) quælibet rationum, in quas continue multiplicatur terminus tam

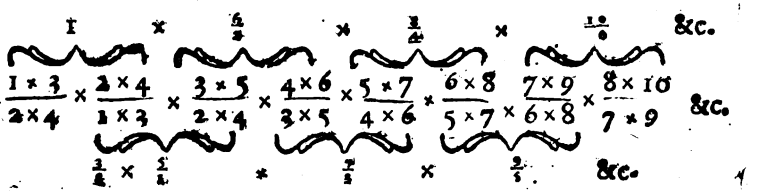
parium

Digitized by Google

parium quam imparium primus, in binas dirimenda est, (nam, verbi gratia, ratio 1 ad 2 composita est ex ratione 1 ad 1 $\frac{1}{2}$ ad 1 $\frac{1}{2}$ ad 2,) hoc modo

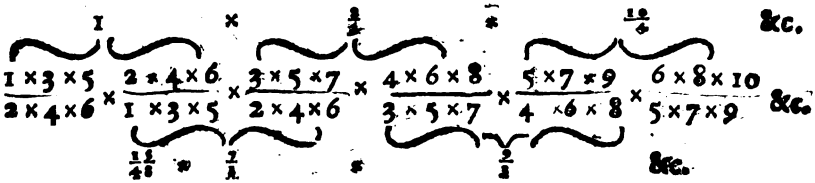


In serie sexta, (sive, parium tertia,) si idem faciendum sit; distribuenda est quælibet ratio item in binas, sed quarum utraq; est ex duabus composita; ad hunc modum.



Nempe, divisa prius quâlibet ratione in quaternas, (puta $\frac{6}{2} = \frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5}$, et $\frac{7}{3} = \frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$, Et sic in cæteris) & tum distributione alternatim facta in binas classes.

In serie Octava (sive parium quarta) distribuenda est quælibet ratio item in binas, sed quarum utraq; est ex ternis composita; sic.



Nempe, divisa prius qualibet ratione in senas, (puta

$\frac{7}{4} =$

$\frac{1}{1} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$, & $\frac{2}{1} = \frac{4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9}{3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}$, &c.)

quæ postea distribuenda sunt alternatim in duas classes.

Et similiter in serie Decima, Duodecima, &c. dividenda quælibet ratio in Octonas, Denas, &c. quæ alternatim distribuendæ sunt in duas classes.

(In serie autem Secunda (sive parium Prima) nulla rationum divisione opus est, sed cum omnes sint eadem æqualitatis ratio, sive $\frac{1}{1}$; eadem illa est & ubiq; interponenda, nam $\frac{1}{1} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{1}$.)

Verum si in seriebus Imparibus illud aggrediamur; nempe ut quælibet ratio in duas (æquabiliter progrediendo) distribuatur; res non ita feliciter succedit.

Nam (verbi gratia) cum (ex analogia reliquarum) rationes seriei Quintæ dividendæ essent in ternas, Septimæ in quinas, &c. (numero semper impares,) non potest fieri ista æquabilis earum distributio in duas classes quæ ad debitam interpolationem requiritur.

Tota propositio (inspecta Tabella) satis per se patet animadvertenti.

Res aliquanto clarius fortasse patebit ubi serierum aliquot rationes in binas, ternas, quaternas, &c. (prout series quælibet postulat) divisero. Nempe

In serie tertia.		In serie quarta.	
$\frac{1}{1} = \frac{1}{1}$	$\frac{2}{1} = \frac{2}{1}$		$\frac{1}{1} = \frac{2 \times 3}{1 \times 2}$
$\frac{2}{2} = \frac{2}{2}$	$\frac{4}{2} = \frac{4}{2}$	$\frac{4}{2} = \frac{3 \times 4}{2 \times 3}$	
$\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$	$\frac{6}{4} = \frac{6}{4}$	$\frac{6}{4} = \frac{5 \times 6}{4 \times 5}$	$\frac{3}{3} = \frac{4 \times 5}{3 \times 4}$
$\frac{4}{5} = \frac{4}{5}$	$\frac{8}{5} = \frac{8}{5}$	$\frac{8}{6} = \frac{7 \times 8}{6 \times 7}$	$\frac{7}{5} = \frac{6 \times 7}{5 \times 6}$
$\frac{5}{6} = \frac{5}{6}$	$\frac{10}{6} = \frac{10}{6}$	$\frac{10}{8} = \frac{9 \times 10}{8 \times 9}$	$\frac{9}{7} = \frac{8 \times 9}{7 \times 8}$

In

In serie quinta.

$$\frac{3}{2} = \frac{3\times4\times5}{2\times3\times4} \qquad \frac{4}{1} = \frac{2\times3\times4}{1\times2\times3}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{5\times6\times7}{4\times5\times6} \qquad \frac{6}{2} = \frac{4\times5\times6}{3\times4\times5}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{7\times8\times9}{6\times7\times8} \qquad \frac{8}{3} = \frac{6\times7\times8}{5\times6\times7}$$

$$\frac{11}{5} = \frac{9\times10\times11}{8\times9\times10} \qquad \frac{10}{4} = \frac{8\times9\,10}{7\times8\times9}$$

In serie sexta.

$$\frac{6}{2} = \frac{3\times4\times5\times6}{2\times3\times4\times5} \qquad \frac{5}{1} = \frac{2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times4}$$

$$\frac{8}{4} = \frac{5\times6\times7\times8}{4\times5\times6\times7} \qquad \frac{7}{2} = \frac{4\times5\times6\times7}{3\times4\times5\times6}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{7\times8\times9\times10}{6\times7\times8\times9} \qquad \frac{9}{3} = \frac{6\times7\times8\times9}{5\times6\times7\times8}$$

$$\frac{12}{6} = \frac{9\times10\times11\times12}{8\times9\times10\times11} \qquad \frac{11}{4} = \frac{8\times9\times10\times11}{7\times8\times9\times10}$$

In serie septima.

$$\frac{7}{2} = \frac{3\times4\times5\times6\times7}{2\times3\times4\times5\times6} \qquad \frac{6}{1} = \frac{2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times4\times5}$$

$$\frac{9}{4} = \frac{5\times6\times7\times8\times9}{4\times5\times6\times7\times8} \qquad \frac{8}{3} = \frac{4\times5\times6\times7\times8}{3\times4\times5\times6\times7}$$

$$\frac{11}{6} = \frac{7\times8\times9\times10\times11}{6\times7\times8\times9\times10} \qquad \frac{10}{5} = \frac{6\times7\times8\times9\times10}{5\times6\times7\times8\times9}$$

$$\frac{13}{8} = \frac{9\times10\times11\times12\times13}{8\times9\times10\times11\times12} \qquad \frac{12}{7} = \frac{8\times9\times10\times11\times12}{7\times8\times9\times10\times11}$$

In seriebus hisce (quantumlibet continuatis) et sequentibus omnibus, notandum est, Rationes cujuslibet ex paribus seriei dividi in alias numero pares, quæ propterea commode distribui possunt (ut dictum est) in duas Classes: cujuslibet autem ex seriebus imparibus, rationes dividi in alias numero impares, quæ propterea sic distribui non possunt.

SCHOLIUM.

Si quis autem putet huic malo medelam satis commode applicari posse, dividendo rationes seriei quintæ, septimæ, &c. (non in ternas, quinas, &c. sed) in senas, denas, &c. (nempe bis ternas, bis quinas, &c.) ut ita rationes (jam numero pares) distribui possint in binas classes: Res neutiquam ex voto succedet. Nam hoc quidem tantundem est acsi Rationes seriei quartæ, sextæ, octavæ, &c, dividantur (non in binas, quaternas, senas, &c, sed) in quaternas, octonas, duodenas, &c. Et harum postea fiat alternatim distributio in duas classes. Quod quidem

si fieret, non ipsæ prodirent rationes quæsitæ, (quas supra exhibuimus,) sed aliæ ab ipsis satis diversæ, ut experienti patebit.

Et quidem proclivis sum ut credam (quod et ab initio suspicatus sum,) rationem illam quam quærimus talem esse quæ non poterit numeris exprimi juxta ullum adhuc receptum notationis modum, ne quidem per latera surda; (quale quid innuit Schotenius, de radicibus Æquationum quarundam cubicarum, in ipsius *Appendice* ad tractatum *de Organica Conicarum Sectionum descriptione*, idq; ad mentem Vietæi, Cartesii, & aliorum:) ut necesse videatur alium ejusmodi rationem explicandi modum introducere, quam vel per numeros veros, vel etiam per latera surda.

Atq; hæc quidem nostra sive sententia, sive conjectura hinc confirmari videtur; Quoniam, si ut serierum parium quælibet (in Tabella prop. 184) suum habet appositum characterem, ita & imparium quælibet ejusmodi characterem nacta esset: tum, ut per characteres parium, rationem investigari docuimus quam habet series finita Primanorum, Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c. ad seriem totidem eorum maximo Æqualium, (in Scholiis ad prop. 182.) ita per ejusmodi characteres serierum imparium, similiter investiganda videretur ratio quam habet finita series Sublecundanorum, Subtertianorum, &c. ad seriem totidem horum maximo Æqualium: cur autem hoc non sperandum sit, ostendimus in Scholiis ad prop. 165.

Et propterea quod in aliis Arithmetices negotiis fieri solet; illud & hic faciendum erit: nempe, ubi ad ἄλογον aliquid pervenitur, quod quidem fieri supponendum est, nec tamen actu fieri potest; excogitant modum aliquem exprimendi id quod fieri supponitur utut factum non sit.

Atq; hoc quidem in Arithmeticis operationibus omnibus resolutoriis usu venit. v. g. In subductione; si proponitur numerus major ex minori auferendus, puta 3 ex 2, vel 2 ex 1; quoniam id actu præstari non potest, excogitantur numeri negativi quibus exprimatur ejusmodi supposititia subductio, puta, 2 — 3, vel 1 — 2, vel — 1.

In divisione; si proponatur numerus per alium dividendus qui ipsum non metitur, puta 3 per 2; cum hoc actu præstari non

Digitized by Google

non possit, inventus est modus ejusmodi supposititiam divisionem indicandi ad hanc formam $\frac{1}{2}$ vel $1\frac{1}{2}$.

In extractione Radicum; si proponatur numerus resolvendus qui non sit sui generis vere figuratus; verbi gratia, si quæratur radix quadratica numeri 12, quoniam radix illa non potest ullis numeris sive integris sive fractis exponi, ideo inventa est methodus ejusmodi Radicem supposititiam utcunq; indicandi ad hanc formam, $\sqrt{12}$, vel $2\sqrt{3}$.

Pariter, in Progressione Geometrica, puta 3, 6, 12, &c. Si quæratur terminus novus inter 3 & 6 interponendus, dicetur ille $3\sqrt{2}$ vel $\sqrt{18}$ vel $\sqrt{:3\times6:}$ vel forte (quod tantundem valet) $\sqrt{:2\times9:}$ quod idem est atq; explicatius dicere, *terminus medius inter 3 & 6 in progressione* 3, 6, 12, &c. aut *inter 2 & 9 in progressione* 2, 9, 40 $\frac{1}{2}$ &c. Ita si inter 3, 6, interponendi essent duo medii Geometrici, esset eorum prior $\sqrt{c:3\times3\times6:}$ vel $\sqrt{c}$ 54 vel potius $3\sqrt{c}$ 2, (nempe 3 ducti in radicem cubicam communis rationis 2) et sic in cæteris.

Si autem Progressio Geometrica, quæ supponitur fieri ex continua multiplicatione primi termini in numeros quotlibet invicem æquales (puta 3, 6, 12, 24, &c.) ex continua multiplicatione $3\times2\times2\times2$ &c.) non semper admittat terminos intermedios rationales: non mirandum est si neq; illud contingat in progressione facta ex termini primi continua multiplicatione in quotlibet succedentes numeros inæquales, sive crescentes sive decrescentes; (puta 1, 2, 6, 24, &c. ex continuè multiplicatis $1\times2\times3\times4$ &c; vel $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{48}$, &c. ex continuè multiplicatis $1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{6}$, &c.

Quoties autem hoc contingit, cum illud veris numeris designari non possit (& ne quidem solis radicibus surdis) quærendus erit modus aliquis id ipsum utcunq; exprimendi. Si igitur ut $\sqrt{:3\times6:}$ significat *terminum medium inter 3 & 6 in progressione Geometrica æquabili* 3, 6, 12, &c. (continue multiplicando $3\times2\times2$ &c.) ita $m:1\frac{1}{2}:$ significet *terminum medium inter 1 & $\frac{1}{2}$ in progressione Geometrica decrescente* $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, &c. (continue multiplicando $1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$ &c.) erit $\square = m:1\frac{1}{2}:$ Et propterea *circulus est ad quadratum diametri, ut 1 ad* $m:1\frac{1}{2}:$ Quæ quidem erit vera circuli quadratura in numeris, quatenus ipsa numerorum natura patitur, explicata.

Et quidem, sicut in progressione Geometrica æquabili, 3, 12,

48, &c. quanquam qui terminum inter 3 & 12 intermedium dicit $\sqrt{:}\ 3 \times 12$: non dicendus erit rem satis explicasse, quoniam terminus ille explicatius dici possit 6 (est enim $\sqrt{:}\ 3 \times 12 : = \sqrt{36} = 6$:) attamen qui inter 3 & 6 (in progressione 3,6, 12, &c.) terminum assignat intermedium $\sqrt{:}\ 3 \times 6$: (vel saltem $\sqrt{18}$, aut $3\sqrt{2}$,) rem satis explicasse dicendus erit, quoniam non potest in vero numero assignari: Ita qui in progressione $1, \frac{15}{8}, \frac{225}{384}$, &c, terminum inter 1 et $\frac{15}{8}$ intermedium dicit $m^{r}:1\,|\,\frac{15}{8}$: non satis explicate rem tradit, dicere enim potuisset $\frac{1}{2}$; At qui inter 1 et $\frac{1}{2}$ medium terminum assignat $m^{r}:1\,|\,\frac{1}{2}$: satis rem explicasse dicendus est, cum iste terminus non possit veris numeris exprimi: adeoq; sufficit si utcunq; indicetur.

Atq; insuper, ut $\sqrt{:}\ 3 \times 6$: (in progressione 3,6,12, &c.) vel $\sqrt{18}$, vel $3\sqrt{2}$, quamvis veris numeris explicari non potest accurate, potest tamen quam proxime designari; (puta major quam $4\overline{|24}$, minor tamen quam $4\overline{|25}$; item major quam $4\overline{|2426}$, minor quam $4\overline{|2427}$; item major quam $4\overline{|242639}$, minor quam $4\overline{|242640}$; et sic deinceps) ita et numerus $\square = m^{r}:1\,|\,\frac{1}{2}$: designari potest veris numeris quam proxime, licet non accurate; puta major quam $1\overline{|27}$, minor tamen quam $1\overline{|28}$; item major quam $1\overline{|2732}$, et minor quam $1\overline{|2733}$; item major quam $1\overline{|273239}$, et minor quam $1\overline{|273240}$; et sic deinceps, prout vel ex tabella nostra (quod sequente propositione ostensurus sum) vel etiam aliunde variis modis colligi potest.

Adeo ut nihil videam cur non ratio circuli ad Quadratum circumscriptum (vel etiam Ellipseos ad circumscriptum parallelogrammum) nempe ut 1 ad $\square = m^{r}:1\,|\,\frac{1}{2}$: vel $\square = 1\ m^{r}\frac{1}{2}$. (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 et $\frac{1}{2}$ in progressione $1, \frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ &c,) æque σεχρικῶς explicari dicenda sit, atq; ratio lateris ad diagonium in quadrato, nempe ut 1 ad $1\sqrt{2}$ vel ad $\sqrt{:}\ 1 \times 2$: (hoc est, ut 1 ad terminum medium inter 1 et 2 in progressione 1,2,4, &c.) nisi quod hæc notatio $\sqrt{2}$ vel $\sqrt{:}\ 1 \times 2$: jamdiu fuerit recepta (sed quæ aliquando fuit nova;) nostra vero jam primitus introducta, propter novum progressionis genus jam primum (quod sciam) detectum. Sicut autem notatio numeri surdi (puta $\sqrt{2}$ &c.) in Arithmeticam introduxit methodum addendi, subducendi, multiplicandi, dividendi, &c. latera surda; ita non erit difficile ejusmodi

Digitized by Google

modi operationes ad novum hunc noſtrum notationis modum applicare; quod tamen præſentis inſtituti non eſt. Non ignoro interim ad hanc ipſam notationem accuratius perficiendam, apponendas eſſe notæ $m\sim$ diſtinctiones ſuas, puta $m\sim^{2}$, $m\sim^{3}$, $m\sim^{4}$, &c, prout indicaverit vel medium unicum, vel primum duorum, trium, &c; ſicut & notæ $\surd$ fieri ſolet, puta $\surd^{2}$, $\surd^{3}$, $\surd^{4}$, &c, prout deſignat radicem quadraticam, vel cubicam, biquadraticam, &c, hoc eſt, vel unicum, vel primum duorum, trium, &c. mediorum proportionalium: Item alias apponendas eſſe diſtinctiones quæ indicent, an continui multiplicationes (in expoſita ſerie interpolanda) vel unitate, vel numero binario, ternario, &c. continue creſcant. Verum ea omnia, & ſiqua ſunt ſimilia, remittenda ſunt ad accuratiorem hujuſce progreſſionis diſquiſitionem ſi illam in Arithmeticam admittendam ſentiant Mathematici, (quod quo minus fiat nihil video.) Præſenti ſufficit inſtituto illud quod volumus utcunq; indicare, & quod in charactere deficit apertis verbis ſupplere. Si autem notationis modus ille a nobis excogitatus Mathematicis minus placuerit; ego quam lubentiſſime illum mutari patiar modo aptiorem oſtendant.

Ut ut ſit: Ego quidem neceſſe habeo ut fatear, me nec ejuſmodi pro ſeriebus imparibus quales pro paribus in Tabella, characteres; nec ſerierum imparium locos impares, adhuc ſupplere poſſe, juxta aliquem (quem adhuc receptum ſcio) notationis modum; (quanquam eorum ad invicem rationes jam oſtenderim.) Et quanquam in ſuperioribus, per avia non raro, et tramites nulli quod ſciam antea calcatas perrumpens, inſperatos exitus aliquoties invenerim: vix tamen (ob cauſas jam expoſitas) auſim ſperare, & hic item ex voto omnia ſucceſſura. Si forſan alius aliquis noſtra dehinc premens veſtigia eo tandem perveniat quo mihi non datum eſt pervenire, (nollem enim pro noſtri modulo aliorum item omnium ingeniis terminos indicere,) & modos magis accommodos eidem quantitati exprimendæ invenerit, ego neutiquam gravatim feram. Mathematicis interim haud ingratum fore autumo me novam aliquam nec (ſi quid ego judico) prorſus contemnendam, obſcuro ſatis de circuli quadratura problemati, lucem præbuiſſe; eamq; eatenus numeris explicaſſe quatenus ipſa numerorum natura ferat.

Digitized by Google

Quod autem jam invenimus, libet etiam, in sequentibus aliquot propositionibus, mutata aliquantulum forma proponere. Et primo quidem qui id possit numeris absolutis quam proxime designari, & deinde etiam lineis rectis.

PROP. CLXXXXI. *Problema.*

PRopositum sit inquirere, quantus sit terminus □ (tabellæ prop. 189.) in numeris absolutis quam proxime.

Quo facilius res succedat, progressionis (ibidem repertæ)

termini $\frac{1}{2}\square$. $1.\square$. $\frac{3}{2}.\frac{4}{3}\square$. $\frac{3\times5}{2\times4}\cdot\frac{4\cdot6}{3\times5}\square$. $\frac{3\times5\times7}{2\times4\times6}$. &c.

dicantur, α. a. β. b. γ. c. δ. d. &c.

Est autem $1.2::\alpha.\beta$. Et $2.3::a.b$. Et $3.4::\beta.\gamma$. Et $4.5::b.c$. Et $5.6::\gamma.\delta$. Et $6.7::c.d$. &c.

Hoc est, $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}$, $\frac{b}{a}=\frac{2}{2}$, $\frac{\gamma}{\beta}=\frac{4}{3}$, $\frac{c}{b}=\frac{4}{4}$, $\frac{\delta}{\gamma}=\frac{6}{5}$, $\frac{d}{c}=\frac{7}{6}$, &c.

Ideoq; (cum rationes continue multiplicantes perpetuo decrescant) erit

$\frac{\beta}{a}$ { minor duarum $\{\frac{a}{\alpha}\times\frac{\beta}{a}=\frac{\beta}{\alpha}=\frac{2}{1}$ } major duarum $\{\frac{\beta}{\alpha}\times\frac{b}{\beta}=\frac{b}{a}=\frac{2}{2}$ } Ideoq; { minor quam $\sqrt{\frac{2}{1}}=\sqrt{1\frac{1}{2}}$. major quam $\sqrt{\frac{2}{2}}=\sqrt{1\frac{1}{2\cdot2}}$.

Et propterea $\beta=a\times\frac{\beta}{a}=\square$ { minor quam $1\sqrt{2}=1\sqrt{1\frac{1}{2}}$. major quam $1\sqrt{\frac{2}{2}}=1\sqrt{1\frac{1}{2\cdot2}}$.

Item $\frac{\gamma}{b}$ { minor duarū $\{\frac{b}{\beta}\times\frac{\gamma}{b}=\frac{\gamma}{\beta}=\frac{4}{3}$ } major duarū $\{\frac{\gamma}{b}\times\frac{c}{2a}=\frac{c}{b}=\frac{4}{4}$ } Ideoq; { minor quam $\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{1\frac{1}{3}}$. major quam $\sqrt{\frac{4}{4}}=\sqrt{1\frac{1}{4\cdot4}}$.

Et

Digitized by Google

Et propterea $b \times \frac{\gamma}{b} = \gamma = \frac{4}{3}\,\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3}{2} \times \sqrt{1\tfrac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{3}{2} \times \sqrt{1\tfrac{1}{4}}. \end{cases}$

Hoc est, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times 3}{2\times 4} \times \sqrt{1\tfrac{1}{3}}. \\ \text{major quam } \frac{3\times 3}{2\times 4} \times \sqrt{1\tfrac{1}{4}}. \end{cases}$

Et (pari ratione) erit $\delta = c \times \frac{\delta}{c} = \frac{4\times 6}{3\times 5}\,\square \begin{cases} \text{minor quã } \frac{3\times 5}{2\times 4} \times \sqrt{1\tfrac{1}{5}}. \\ \text{major quã } \frac{3\times 5}{2\times 4} \times \sqrt{1\tfrac{1}{6}}. \end{cases}$

Hoc est, $\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 4\times 4\times 6} \sqrt{1\tfrac{1}{5}}. \\ \text{major quam } \frac{3\times 3\times 5\times 5}{2\times 4\times 4\times 6} \sqrt{1\tfrac{1}{6}}. \end{cases}$

Et (continuatâ ejusmodi operatione juxta Tabellæ leges) invenietur

$\square \begin{cases} \text{minor quam } \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12\times 14} \times \sqrt{1\tfrac{1}{13}}. \\ \text{major quam } \frac{3\times 3\times 5\times 5\times 7\times 7\times 9\times 9\times 11\times 11\times 13\times 13}{2\times 4\times 4\times 6\times 6\times 8\times 8\times 10\times 10\times 12\times 12\times 14} \times \sqrt{1\tfrac{1}{14}}. \end{cases}$

Et sic deinceps quousq; libet. Ita nempe ut fractionis Numerator fiat continue multiplicando numeros impares 3, 5, 7, &c. bis positos; Denominator vero, continue multiplicando numeros pares, 2, 4, 6, &c, bis item positos, exceptis primo & ultimo, qui semel ponuntur: Et tota deniq; ratio seu fractio, sic facta, ducatur in Radicem quadraticam Unitatis aliquotâ parte sui auctæ; eâ nempe quæ denominatorem habet eum qui est ultimus numerorum, continue multiplicatorum, imparium, si quæramus numerum justo majorem, vel parium, si justo minorem.

Atq; hoc pacto eousq; tandem pervenietur donec majoris & minoris differentia evadat quavis assignata minor; (quæ propterea, si supponatur in infinitum continuanda operatio, tan-

dem evanitura est.) Quod quidem, si opus sit, sic demonstrabitur.

Numerorum, ita ut jam dictum est, continuè multiplicatorum, parium maximus (nempe, ex denominatoris factoribus ultimus) dicatur z; adeoq; imparium maximus (nempe, ultimus ex factoribus Numeratoris,) erit $z-1$, (quippe qui ab isto unitate deficit.) Erit igitur (propter eundem utrobiq; multiplicatorem compositum) numerus justo major ad numerum justo minorem ut $\sqrt{1\frac{1}{z-1}}$ ad $\sqrt{1\frac{1}{z}}$, (nempe, ut terminalis numerus surdus in illo ad terminalem numerum surdum in hoc,) hoc est, ut $\sqrt{\frac{z}{z-1}}$ ad $\sqrt{\frac{z+1}{z}}$, hoc est, ut $\sqrt{\frac{z^2}{z-1}}$ ad $\sqrt{:z+1}$: hoc est, ut $\sqrt{z^2}=z$ ad $\sqrt{:z^2-1}$. Fieri autem potest (aucta nempe, quantum opus est, quantitate z) ut differentia radicum $\sqrt{z^2}$ & $\sqrt{:z^2-1}$: nempe $z-\sqrt{:z^2-1}$: minor evadat quâvis assignanda, (ut notum est, & alibi etiam a nobis dictum ad prop. 39. Con. Sect.) Et propterea numerus justo major excedat numerum justo minorem, secundum eam rationem quæ minor sit quavis assignata. Quod erat ostendendum.

Cum autem, ut ex dictis patet, aucto in infinitum numero z, numerus justo major numerum justo minorem eâ ratione superet quæ minor sit quavis assignata: erit eorum ab invicem differentia (& propterea utriusvis a justo) infinite parva, hoc est, nulla.

Porro; Quoniam, numero z sic in infinitum aucto, illa Unitati adjuncta pars sui aliquota, futura est infinite parva; erit, sive $\sqrt{1\frac{1}{z}}$, sive $\sqrt{1\frac{1}{z-1}}$, tantundem atq; $\sqrt{1}$, sive 1, (propter evanescentem partem infinite parvam,) quæ multiplicando nihil mutat: Dicimus, fractionem illam $\frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times\&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times\&c.}$ in infinitum continuatam, esse ipsissimum quæsitum numerum a præcise; ad quem ita se habet 1, ut circulus ad Quadratum diametri: Vel, (si id magis placeat,) ut est istius fractionis Denominator ad Numeratorem, sic esse dicimus circulum ad diametri

diametri Quadratum: Et, ut Numerator ille ad Denominatorem, sic Quadratum illud ad Circulum.

Si quis autem curiosius inquirat, quousq; continuanda erit illa multiplicatio-continua, ut tandem ad differentiam datam, sive ipsa minorem perveniatur: Nempe ut numerus justo major, numerum justo minorem, ipsius parte quamlibet exigua (vel ne illâ quidem) superet: Id hoc modo investigabitur.

Quantitas major dicatur m, minor n, sitq; earum differentia, istius pars quantumvis exigua; puta $\frac{a}{b}\ m = m - n$; & quæratur quousq; continuanda erit operatio, hoc est, quis futurus est numerus z multiplicatorum maximus, ut illa differentia (vel saltem ipsâ minor) prodeat.

Quoniam igitur $m - n = \frac{a}{b}\ m$, erit $n = m - \frac{a}{b}\ m$; & $m. n :: m. m - \frac{a}{b}\ m :: \frac{b}{b}\ m. \frac{b-a}{b}\ m :: b. b - a :: z. \sqrt{:} z^2 - 1$. (per modo demonstrata.) Ideoq; $b\sqrt{:} z^2 - 1 :=: bz - az$. Et (utrinq; quadrando) $b^2 z^2 - b^2 = b^2 z^2 + a^2 z^2 - 2abz^2$. Atq; (delendo utrinq; $b^2 z^2$, & reliqua transponendo,) $2abz^2 - a^2 z^2 = b^2$. Et deniq; (utrinq; dividendo) $z^2 = \frac{b^2}{2ab - a^2}$. Hujus igitur numeri radix quadratica, (si fuerit numerus par,) vel saltem, (sive fractus vel surdus sit vel numerus impar) par numerus illa proxime major, futurus est multiplicatorum maximus, ut assignata differentia, vel ipsa saltem minor, proveniat. Quod erat investigandum.

Idem Aliter.

Post hanc autem nostram, ipsius quantitatis □ designationem; libet etiam aliam subjungere, quam a Nobilissimo Viro, atq; acutissimo simul Geometra, Dom. Guliel. Viscount, & Barone *Brouncher*, accepi.

Cum illi progressionum aliquot mearum proposuerim, & qua lege procederent indicaverim, id interim rogans, ut qua forma quantitatem illam commode designandam putaverit, indi-

caret; Nobiliſſimus Vir ille, re apud ſe perpenſa, methodo item Infinitorum ſibi peculiari quantitatem ad hanc formam commodiſſime deſignandam judicavit. Nempe ſi unitati adjungatur fractio, quæ denominatorem habeat continuè fractum; eâ lege, ut particularium fractionum Numeratores ſint 1, 9, 25, &c. numeri quadratici imparium 1, 3, 5, &c. Denominator vero ubiq; 2 cum adjuncta fractione, & ſic in infinitum. Hoc ſimul addito, ut, ubicunq; tandem placeat conſiſtere, pro ultimo numero 2 cum fractione deinceps inſecuturâ, ponatur horum aliquis (prout locus ubi conſiſtitur poſtulaverit) 3, 5, 7, 9, &c. (deinceps ab 1, numero integro, arithmetice proportionalium;) nempe ſi in primo loco ſiſtatur, 3; ſi in ſecundo, 5; ſi in tertio, 7; & ſic deinceps; poſito numeri qui locum denominat duplo unitate aucto. Atq; hoc facto, ſi in fractionis loco impari ſiſtatur, prodibit numerus juſto major; ſin pari, juſto minor. Quo longius autem proceedatur eo propius utrinq; ad numerum juſtum accedituſ.

$\bigcirc = 1\frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}$ &c.

1. juſto minor.

$1\frac{1}{3}$. juſto major.

$1\frac{1}{2}\frac{2}{5}$. juſto minor.

$1\frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{7}$. major.

Atq; ad eandem formam numeros reliquos tabellæ noſtræ quæſitos deſignavit; aliaſq; ex progreſſionibus noſtris, iis in expoſita tabella ſimiles, interpolavit. Totum vero illius methodi proceſſum aperire, longius eſſet quam ut hic inſeratur. Sperabam autem aliquando fore ut id ipſum ab illo in formam digeſtum publice exhibeatur.

$1\frac{1}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{2}\frac{2}{9}$ minor.

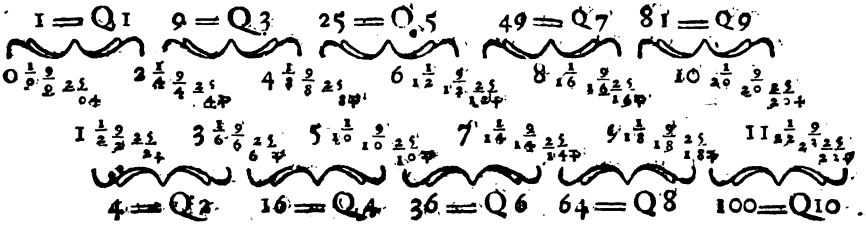
SCHOLIUM.

Quum vero Nobiliſſimo Viro difficilius perſuaſum iri video ut illud ipſe ſuſcipere velit: conabor ego rem illam ad ipſius mentem, quam poſſim proxime, breviter exhibere.

Animadvertit ſiquidem Nobiliſſimus Vir, numeros duos impares continue proximos, ſi invicem ducantur, rectangulum facere, quod quadrato intermedii numeri paris ſit unitate minus (puta

Digitized by Google

(puta $1 \times 3 = 3 = 4 - 1 = \square 2 - 1$. $3 \times 5 = 15 = 16 - 1 = \square 4 - 1$. &c.) Et similiter duos pares proxime positos rectangulum facere quod unitate minus sit quam quadratum intermedii numeri imparis, (puta $0 \times 2 = 0 = 1 - 1 = \square 1 - 1$. $2 \times 4 = 8 = 9 - 1 = \square 3 - 1$. $4 \times 6 = 24 = 25 - 1 = \square 5 - 1$. &c.) Quærebat igitur qua ratione augendi erant factores, ut prodirent rectangula, non quadratis illis unitate minutis, sed ipsis quadratis æqualia. Invenit autem id fieri posse, si utriq; factores fractione augeantur, quæ denominatorem haberet continue fractum in infinitum, ad eam formam quam superius exhibuimus: Nempe ut particularium fractionum Numeratores sint quadrata numerorum imparium. Denominator verò ubiq; integri duplus fractione auctus in infinitum. Ad hanc formam, quousq; libet continuandam.



Factores autem illi sic constituti, quantumlibet continuati, (modo ne in infinitum,) rectangulum facient debito quadrato vel minus, si numerus fractionum integro adjunctarum sit par; vel majus si impar; ita tamen ut quo longius procedatur eo propius ad quadratum debitum accedat. quod hac demonstratione confirmatur.

Esto, ex debitis factoribus quibusvis, prioris numerus integer F, adeoq; posterioris F + 2; numerus igitur interjectus (quod latus est quadrati) F + 1. Eorum rectangulum $Fq + 2F$ minus est quam hujus quadratum $Fq + 2F + 1$.

Jam adjungatur utriq; factori fractio una; factores igitur $F \frac{1}{2F}$, $F + 2 + \frac{1}{2F+4}$, constituent rectangulum $\frac{4Fqq + 16Fc + 20Fq + 8F + 9}{4Fq + 8F}$, quod majus erit quam

qua-

Digitized by Google

quadratum $Fq+2F+1 = \frac{4Fqq+16Fc+20Fq+8F.}{4Fq+1F}$

Adjungantur deinde fractiones binæ; Fractiones emergentes $F\frac{1}{2F}\frac{0}{2F}$, $F+2+\frac{1}{2F+4}+\frac{9}{2F+4}$, constituent rectangulũ

$$\frac{4Fc+11F}{4Fq+9} \times \frac{4Fc+24Fq+59F+54}{4Fq+16F+25} =$$

$$\frac{16Fcc+96Fcq+280Fqq+480Fc+649Fq+564F}{16Fqq+64Fc+136Fq+144F+225}$$

quod minus est quam quadratum $Fq+2F+1 =$

$$\frac{16Fcc+96Fcq+280Fqq+480Fc+644Fq+504F+225}{16Fqq+64Fc+136Fq+144F+225}$$

Et sic quousq; procedatur, prodibit rectangulum quod erit nunc minus nunc majus (alternis vicibus) quam expositun quadratum, (quæ tamen differentia perpetuo minuitur, ut patet,) quod erat demonstrandum.

His autem sic inventis; poterunt illa ad series nostras ita accommodari, ut inde innotescant termini in tabella desiderati juxta hunc notationis modum designandi.

Exempli gratia; Tabellæ nostræ series prima componitur, (ut supra ostensum est) in locis imparibus, ex continua multiplicatione. $A\times\frac{0}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{7}$ &c. vel $A\times\frac{0}{2}\times\frac{4}{6}\times\frac{8}{10}\times\frac{12}{14}$ &c. Et in locis paribus $1\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}\times\frac{5}{6}\times\frac{7}{8}$ &c. vel $1\times\frac{2}{4}\times\frac{6}{8}\times\frac{10}{12}\times\frac{14}{16}$ &c. Hoc est

$$A\times\frac{0\times2)\,Q\,0\,(\frac{0}{2}}{-1\frac{1}{2}\frac{2}{2}}\times\frac{4\times6)\,Q\,4\,(\frac{4}{6}}{3\frac{1}{6}\frac{2}{6}}\times\frac{8\times10)\,Q\,8\,(\frac{8}{10}}{7\frac{1}{14}\frac{2}{14}}\times\frac{12\times14)\,Q\,12\,(\frac{12}{14}}{11\frac{1}{22}\frac{2}{22}}\times\text{ \&c.}$$

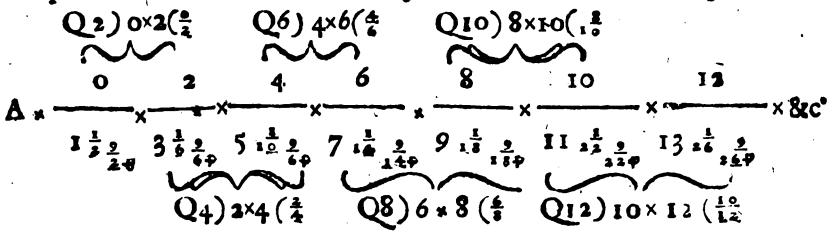
$$\frac{1+1\frac{1}{2}\frac{2}{2}}{2}\quad\frac{5\frac{1}{10}\frac{2}{10}}{6}\quad\frac{9\frac{1}{18}\frac{2}{18}}{10}$$

$$0\qquad 2\qquad 4\qquad 6\qquad 8\qquad 10\qquad 12$$

$$2\times4)\,Q\,2\,(\frac{2}{4} \qquad 6\times8)\,Q\,6\,(\frac{6}{8} \qquad 10\times12)\,Q\,10\,(\frac{10}{12}$$

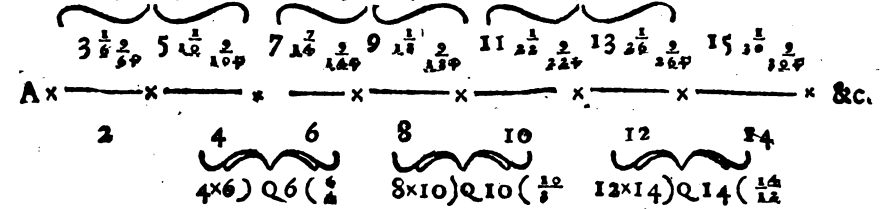
Vel etiam, (quod eodem plane recidit,) ad hanc formam,

A×



Utrovis modo, rationes quibus numeri vel paribus vel imparibus locis ponendi conſtituuntur, reſolvi poſſunt in binas (ut patet) quibus conſtituantur numeri locis continuis ponendi; numeris nempe locorum tum pariùm tum imparium in unam ſeriem interpolatione mutua redactis.

Similiter in ſerie tertia, cujus numeri in locis imparibus poſiti, conſtituuntur ex continue multiplicatis $A \times \frac{2}{1} \times \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7}$ &c. vel $A \times \frac{4}{2} \times \frac{8}{6} \times \frac{12}{10} \times \frac{16}{14}$ &c. Et locis paribus $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c. vel $1 \times \frac{6}{4} \times \frac{10}{8} \times \frac{14}{12} \times \frac{18}{16}$ &c. Hoc eſt



Atq; hæc quidem abunde ſufficiant ad omnes tabellæ noſtræ numeros complendos, cum jam ſupra oſtenſum ſit prop. 188. uno aliquo deſideratorum invento reliquos ſtatim innoteſcere. Si quis tamen cupiat, ut nos ſeriei primæ & tertiæ rationes reſolvimus, ita & reliquarum ſerierum rationes item reſolutas habere: poterit quidem & illud fieri, ita tamen ut in ſerie quarta (hoc eſt, poſt unitatum ſeriem ſecunda) erit rationum prodeuntium quælibet bimembris, in quinta trimembris, & ſic deinceps.

Nempe, in quarta, ad hanc formam

Digitized by Google

$$A \times \frac{2\times4\times4\times6)\ Q:\ 4\times6:\left(\frac{4}{2}=\frac{2}{1}\right)}{3\frac{1}{6}\frac{2}{6+}\times5\frac{1}{10}\frac{2}{10+}} \times \frac{6\times8\times8\times10)\ Q:\ 8\times10:\left(\frac{80}{64}=\frac{5}{4}\right)}{5\frac{1}{10}\frac{2}{10+}\times7\frac{1}{14}\frac{2}{14+}} \times \frac{7\frac{1}{14}\frac{2}{14+}\times9\frac{1}{18}\frac{2}{18+}}{2\times4} \times \frac{9\frac{1}{18}\frac{2}{18+}\times11\frac{1}{22}\frac{2}{22+}}{4\times6} \times \frac{\&c.}{6\times8} \times \frac{}{8\times10}$$

$$4\times6\times6\times8\)\ Q:\ 6\times8:\left(\frac{48}{48}=\frac{1}{1}\right)$$

In ſerie quinta, ad hanc formam.

$$A \times \frac{2\times4\times6\times4\times6\times8\)\ Q:\ 4\times6\times8:\left(\frac{192}{48}=\frac{4}{1}\right)}{3\frac{1}{6}\frac{2}{6+}\times5\frac{1}{10}\frac{2}{10+}\times7\frac{1}{14}\frac{2}{14+}} \times \frac{5\frac{1}{10}\frac{2}{10+}\times7\frac{1}{14}\frac{2}{14+}\times9\frac{1}{18}\frac{2}{18+}}{2\times4\times6} \times \frac{\&c.}{4\times6\times8}$$

$$4\times6\times8\times6\times8\times10)\ Q:\ 6\times8\times10:\left(\frac{480}{48}=\frac{10}{1}\right)$$

Et ſimiliter in ſequentibus ſeriebus. Nempe ſingulæ rationes ſeriei quartæ, quintæ, ſextæ &c. componuntur ex ſeriei tertiæ rationibus binis, ternis, quaternis, &c.

Cum autem in ſingulis his rationum jam inventarum ſeriebus (ex quarum continuo ductu conſtituuntur Tabellæ noſtræ numeri) commodum videatur ut in variis formis exhiberi poſſint, & (prout opus videbitur) ab una in aliam transformari quo melius (aliarum fractionum inſtar) operationes arithmeticas ſuſcipiant: Poteſt & id commode fieri per ea quæ in hujus Scholii initio tradita ſunt. Nempe, reſolutis (ut ibidem docetur) quadratis numerorum parium in rectangulorum illis æqualium latera illic indicata, notentur ſingula (ob commodiorem proceſſum) ſuis ſymbolis, hoc modo,

Digitized by Google

Q2	Q4	Q6	Q8	Q10	Q12	Q14	Q16	
□	B	C	D	E	F	G	H	I
$1\frac{1}{2}\frac{2}{2\cdot 9}$	$3\frac{1}{6}\frac{2}{6\cdot 9}$	$5\frac{1}{10}\frac{2}{10\cdot 9}$	$7\frac{1}{14}\frac{2}{14\cdot 9}$	$9\frac{1}{18}\frac{2}{18\cdot 9}$	$11\frac{1}{22}\frac{2}{22\cdot 9}$	$13\frac{1}{26}\frac{2}{26\cdot 9}$	$15\frac{1}{30}\frac{2}{30\cdot 9}$	$17\frac{1}{36}\frac{2}{36\cdot 9}$
		$\frac{4}{1}$ □	$\frac{2}{6}$ B	$\frac{16}{2}$ C	$\frac{25}{16}$ D	$\frac{36}{25}$ E	$\frac{49}{36}$ F	$\frac{64}{49}$ G
				$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}$ □	$\frac{2}{6}\times\frac{25}{16}$ B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$ C	$\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$ D	$\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$ E
						$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}$ □	$\frac{2}{6}\times\frac{25}{16}\times\frac{49}{36}$ B	$\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$ D
								$\frac{4}{1}\times\frac{16}{9}\times\frac{36}{25}\times\frac{64}{49}$ □

Cum enim sit □B = Q2 = 4, & BC = Q4 = 16:
Erit 4. 16 :: □B. BC :: □. C = $\frac{16}{4}$□ = 4□;
Et $\frac{1}{4}$C = □. Item □)4(B, & B)4(□.
Et similiter in locis reliquis.

Adeoq;

Digitized by Google

Adeoq; cum rationes nuper inventæ, ſint in ſerie

prima $A \times \frac{0}{1\frac{1}{2}} \times \frac{2}{3\frac{1}{6}} \times \frac{4}{5\frac{1}{10}} \times \frac{6}{7\frac{1}{14}} \times \frac{8}{9\frac{1}{18}} \times \frac{10}{11\frac{1}{22}} \times \frac{12}{13\frac{1}{26}}$ &c.

hoc eſt $A \times \frac{0}{\square} \times \frac{2}{B} \times \frac{4}{C} \times \frac{6}{D} \times \frac{8}{E} \times \frac{10}{F} \times \frac{12}{G}$ &c.

ſecunda, $A \times \frac{2}{2} \times \frac{4}{4} \times \frac{6}{6} \times \frac{8}{8} \times \frac{10}{10} \times \frac{12}{12}$ &c.

tertia, $A \times \frac{B}{2} \times \frac{C}{4} \times \frac{D}{6} \times \frac{E}{8} \times \frac{F}{10} \times \frac{G}{12} \times \frac{H}{14}$ &c.

quarta, $A \times \frac{BC}{2\times4} \times \frac{CD}{4\times6} \times \frac{DE}{6\times8} \times \frac{EF}{8\times10} \times \frac{FG}{10\times12} \times \frac{GH}{12\times14} \times \frac{HI}{14\times16}$ &c

quinta, $A \times \frac{BCD}{2\times4\times6} \times \frac{CDE}{4\times6\times8} \times \frac{DEF}{6\times8\times10} \times \frac{EFG}{8\times10\times12} \times \frac{FGH}{10\times12\times14} \times \frac{GHI}{12\times14\times16}$ &c

Et ſic in cæteris: (ubi tamen intelligendum eſt A non eandem eſſe ubiq; quantitatem, ſed in ſerie prima $A = \infty$ vel potius $\infty \square$, in ſecunda $A = 1 = \infty \square \times \frac{0}{\square}$, in tertia $A = \frac{1}{2}\square = 1 \times \frac{2}{B}$, in quarta $A = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\square \times \frac{4}{C} = \frac{1}{2}\square \times \frac{1}{\square}$, in quinta $A = \frac{1}{3}\square = \frac{1}{2} \times \frac{6}{D} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6}C = \frac{1}{2} \times \frac{4}{6}\square$. Et ſic deinceps. Nam ſeries prima erecta, eadem eſt cum prima tranſverſa; ut ſupra liquet.) Poſſunt illæ, per æquipollentiam modo demonſtratam, ſic exhiberi, ut non niſi uno aliquo numerorum horum interminabilium opus ſit in ſingulis exprimendis; & ſæpe quidem ne uno: Exempli gratia, In ſerie quinta, ratio ſecunda $\frac{CDE}{4\times6\times8} = \frac{36E}{4\times6\times8} = \frac{64C}{4\times6\times8} = \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c. Hæc igitur ratio, quolibet modorũ illorum deſignata, ducta in iſtius ſeriei terminũ ſecundũ 1, (in tabella noſtra repertum) habetur terminus tertius, $1 \times \frac{4\square}{3} = \frac{16}{3B} = \frac{C}{3} = \frac{12}{D} = \frac{3E}{16}$ &c.

Tertius autem hic terminus, ductus in rationem ſequentem $\frac{DEF}{6\times8\times10} = \frac{64F}{6\times8\times10} = \frac{100D}{6\times8\times10} = \frac{900B}{1920} = \frac{15}{8\square} = \frac{15B}{32} = \frac{15}{2C} = \frac{5D}{24} = \frac{40}{3E}$ &c. Exhibebit ejuſdem ſeriei terminum quartum $\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$, eundem nempe quem exhibet

exhibet Tabella. (Sed & idem terminus pariter exhibebitur ex ductu secundi termini 1, in rationem ex secunda & tertia compositam.) Atq; ad hunc modum licebit singulos tabellæ nostræ terminos indicare, adhibito nonnunquam uno quovis, sæpius autem ne uno quidem, numerorum istorum interminabilium; quorum quidem nos primum, hac nota □ designatum, in tabella nostra adhibuimus.

Est igitur ratio circuli ad quadratum diametri, (per jam dicta)

$$\frac{1}{4}p.d.d^2 :: 1.\ \square = \frac{4}{B} = \frac{C}{4} = \frac{9}{D} = \frac{9E}{64} = \frac{225}{16F} = \frac{25G}{256}$$

&c. Et similiter (cum sit ratio perimetri ad diametrum quadrupla rationis circuli ad quadratum, quia nempe $\frac{1}{4}p.d.d^2 : \frac{1}{4}p.d.$) ratio perimetri ad diametrum $p.d :: 4.\square$: & diametri ad perimetrum $d.p :: \square.4$: :

$$:: 1.\ \frac{4}{\square} = B = \frac{16}{C} = \frac{4D}{9} = \frac{256}{9E} = \frac{64F}{225}\ \frac{1024}{25G}$$ &c.

Nempe $\left\{\begin{matrix}\square\text{: sic Circulus ad quadratum Diametri.}\\ B\text{: sic Circuli Diameter ad Perimetrum.}\end{matrix}\right.$ ut 1 ad

Superest, ut rationem ostendam cur in assignando valorem quantitatis □, superius dixerim, pro fractionis continue fractæ denominatore ultimo (ubicunq, sistendum quis velit) ponendum esse, non 2, sed vel, 3, 5, 7, 9, &c. prout locus ubi consistitur postulaverit. (quod non tam necessitatis, quam perspicuitatis causa factum est.) Quæ quidem ratio, hæc est.

Cum supponatur (juxta jam tradita) $\square \times B = Q2 = 4$. sitq; $\square = 1\frac{1}{2}\frac{2}{2+p}$ & $B = 3\frac{1}{6}\frac{2}{6+}$. Adeoq; si numerum $4 = Q2$ dividamus per B (factorem posteriorem) prodibit □. Si quantitas B imperfecte sumatur, non prodibit ipsa quantitas □, sed alia quæ major sit vel minor, prout B imperfecte sumpta, sit ipsa B accurate, minor vel major. Nempe si pro divisore B sumatur 3, divisione facta, pro □ prodibit $1\frac{1}{3}$: si pro divisore $3\frac{1}{6}$. prodibit $1\frac{2}{2\frac{2}{5}}$: si $3\frac{1}{6}\frac{2}{6}$; prodibit $1\frac{2}{2\frac{2}{2}}\frac{2}{2}$. Et sic deinceps: ut ex ipso calculo patebit.

Et sic in $B = 3\frac{1}{6+p}$, $C = 5\frac{1}{10+}$, $D = 7\frac{2}{14+}$, &c. faciendum erit. Nempe in B, denominator ultimus erit unus ex his 5, 7, 9,

Digitized by Google

11, &c. (is nempe quem locus ubi fiftitur poſtulaverit;) qui a 3 (numero integro unde quantitatis B deſignatio inchoatur) in progreſſione Arithmetica binario continue creſcunt. Et ſimiliter, in C, unus ex his 7, 9, 11, 13, &c: Et, in D, unus ex illis 9, 11, 13, 15, &c. (qui nempe illic a 5, hic a 7, in Arithmetica progreſſione continua, binario creſcunt:) Et in ſequentibus ſimiliter: quod ipſe calculus indicabit.

Adeoq; univerſaliter; in earum quantitatum qualibet deſignanda, (quocunq; tandem loco ſiſtere libuerit,) pro denominatore ultimo ſumendus erit numeri qui fractionum locum denominat duplus numero integro quæ deſignationem inchoat auctus.

Si quis autem quærat, cur in hoc proceſſu (in denominatore ultimo deſignando) per factorem poſteriorem potius quam priorem diviſionem faciamus: Ratio eſt, quia ſic res commodius procedit. Nam uti jam denominatores illi ab inchoante numero integro arithmetice procedunt creſcendo; ſi per factorem priorem fieret diviſio, denominatores illi ab inchoante numero integro retrocederent decreſcendo, donec tandem perveniatur ad numeros negativos (qui deſignationem magis turbabunt) ut experimento facto patebit. Adeoq; ad illam legem, ſi (verbi gratia) deſignanda ſit quantitas F, dividendo Q 10 = 100 per E, denominatores illi ſic prodeuntes futuri ſunt 9, 7, 5, 3, 1, — 1, &c. Si autem ad methodum priorem dividatur Q 12 = 144 per G, fuiſſent 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, &c. nempe a numero 11 illic decreſcendo, hic creſcendo: ubi autem hac methodo tota quantitas prodit juſta major, illa prodibit etiam juſtâ major, & contra. Unde etiam patet, priorem illam methodum deſignandi ultimum denominatorem non modo minus turbatam, ſed & magis accuratam eſſe, quam eſt poſterior. Cum enim exceſſus & defectus ſit ſemper penes ultimam fractionem (cujus nempe adjectione quantitas quæ prius erat juſtâ major fit juſtâ minor, aut contra,) ubi denominator eſt major (eodem manente numeratore) fractio minor eſt, adeoq; ſive exceſſus ſive defectus minor, quam ſi denominator ille fuiſſet major: adeoq; denominatorum illorum aſſumptio per continuum augmentum minuit, at quæ per continuum decrementum auget errorem. Quod quidem eouſq; verum eſt, ut ne quidem illa noſtra emendatio, quæ per continuum denomina-

Digitized by Google

minatorum incrementum procedit, quicquam adfert commodi (sed incommodi potius ob dictam rationem,) donec eousq; procedatur ut denominator ille auctus major sit denominatore communi, (eo nempe qui æquatur duplo inchoantis numeri integri,) nam, donec eo perveniatur, mutatio illa communis denominatoris in denominatorem crescentem, non minuit, sed auget adjunctam illam fractionem, adeoq; & errorem.

Hoc unicum adhuc restare videtur; nempe ut ostendam qua lege Fractiones hujusmodi continue fractæ ad fractiones ordinarias commode reducantur.

Cum autem id fieri possit methodo nemini ignota, inchoando a fine, & recedendo donec ad principium tandem deveniatur: Optandum interim videtur, ut id fieri possit inchoando a principio & procedendo quousq; libet. Hoc igitur qui fieri possit jam sumus ostensuri.

Esto igitur fractio ejusmodi continue fracta quælibet, sic designata.

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{\gamma}\,\frac{d}{\delta}\,\frac{e}{\varepsilon}\ \&c.$$

Cum igitur constet, recepta methodo, reductionem institui posse ad hunc modum,

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a}{\alpha}$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta} = \frac{a\beta}{b+\alpha\beta}$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{\gamma} = \frac{ac+a\beta\gamma}{ac+b\gamma+\alpha\beta\gamma}$$

$$\frac{a}{\alpha}\,\frac{b}{\beta}\,\frac{c}{\gamma}\,\frac{d}{\delta} = \frac{a\beta d+ac\delta+a\beta\gamma\delta}{bd+\alpha\beta d+ac\delta+b\gamma\delta+\alpha\beta\gamma\delta}$$

Et sic deinceps, quantum opus erit. Nos inde hanc colligimus regulam, cujus ope a principio reductionem inchoemur quousq; libet continuandam;

$$\left.\begin{array}{cccccc} P & Q & P & Q & Q & \cdot \\ \hline & N_1 & & N_2 & := & N_3 \\ N_3 \times D_1 & + & D_3 \times D_2 & & & D_3 \end{array}\right\}$$

Hoc

Hoc eſt; Si (trium continue ſequentium fractionum) tam Numerator tertius propoſitus ducatur in Numeratorem primum jam jam quæſitum, quam Denominator tertius propoſitus in Numeratorem ſecundum jamjam quæſitum, aggregatum erit Numerator tertius quæſitus. Et ſimiliter, ſi tam Numerator tertius propoſitus ducatur in Denominatorem primum jamjam quæſitum, quam Denominator tertius propoſitus in Denominatorem ſecundum jamjam quæſitum, aggregatum erit Denominator quæſitus.

Exemplo res fiet manifeſta.

Sit fractio reducenda $\frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}\frac{81}{11}$

Operatio ſic inſtituetur. Inventa fractione ſecunda modo uſitato; tertia & quæ deinceps ſic reperientur.

			P	Q
$\frac{25}{2}$	$\times 1 = 25$ $\times 2 = 4$	29	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{25}{2}$	$\times 2 = 50$ $\times 13 = 26$	76	$\frac{9}{2}$	$13\frac{2}{2} = \frac{1}{2}\frac{9}{2}$
$\frac{49}{2}$	$\times 2 = 98$ $\times 29 = 58$	156	$\frac{25}{2}$	$\frac{29}{76} = \frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}$
$\frac{49}{2}$	$\times 13 = 637$ $\times 76 = 152$	789	$\frac{49}{2}$	$\frac{156}{789} = \frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}$
$\frac{81}{11}$	$\times 29 = 2349$ $\times 156 = 1716$	4065	$\frac{81}{11}$	$\frac{4065}{14835} = \frac{1}{2}\frac{9}{2}\frac{25}{2}\frac{49}{2}\frac{81}{11}$
$\frac{81}{11}$	$\times 76 = 6156$ $\times 789 = 8679$	14835		

Et ſic deinceps quouſq; opus erit. Ratio operationis ex jam dictis patet.

Siquis autem adhuc miretur, unde factum ſit quod fractiones hæ continue fractæ, (prout hic vel illic cuiquam ſiſtere placuerit) ſint alternatim nunc majores nunc minores quantitate debita: hujus rei cauſam ſic breviter accipiat. Cum certum

Digitized by Google

tum sit numerum integrum sine ulla adjuncta fractione justo minorē esse, fractio prima, huc integro adjuncta, quantitatem auget: sed eò minus auget quo ipsa minor fuerit. Hæc igitur prima fractio quantitatem auget, & quidem eousq; ut jam, quæ fuerat justa minor fiat justa major. Hujus autem fractionis, eodem manente numeratore, si denominator augeatur, (quod fit adjecta fractione secunda,) fractio prima, adeoq; & tota quantitas, adjectione secundæ minuitur. Hæc autem diminutio eò minor erit (adeoq; & tota quantitas major) quo ipsius secundæ fractionis (manente numeratore) denominator augetur; quod fit adjectione tertiæ fractionis. Tertia igitur fractio secundum minuit, adeoq; primam auget, ut & totam igitur quantitatem. Et similiter in sequentibus. Puta quartæ adjectio minuit tertiam, hoc est, auget, secundam, adeoq; minuit primam, totamq; quantitatem. Quinta minuit quartam, adeoq; auget tertiam, minuit secundam, augetq; primam totamq; quantitatem. Adeoq; fractionum adjectio in locis imparibus auget, in paribus minuit quantitatem: Quod non de his tantum, sed de quibusvis aliis fractionibus ita (quoad denominatores) continue fractis, intelligendum erit.

Atq; hactenus Nobilissimi Viri mentem, quantâ potui brevitate simul atq; perspicuitate exposui; quæq; de ipsius methodo dicenda habui breviter indicavi.

PROP. CXCII. *Theorema.*

SI sit æquabilis Curva (non hinc inde subsultans) VC, cujus Axis VX, & Tangens invertice VT; unde ductis ad curvam rectis axi parallelis, & ab invicem æqualibus distantiis remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, &c. (in locis paribus,) sint ut 1, 6, 30, 140, &c. (qui numeri fiunt ex continuâ multiplicatione horum, $1 \times \frac{6}{1} \times \frac{10}{2} \times \frac{14}{3} \times \frac{18}{4}$, &c.) Erit, ut Secunda ad Tertiam (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis 1, 6, interponendum,) sic Semicirculus ad Quadratum Diametri.

Sequitur ex Prop 139, et 135.

Digitized by Google

PROP. CXCIII. *Theorema.*

SI exponatur æquabilis curva VC, cui occurrat in vertice VT, unde ductis ad curvam quotlibet rectis parallelis & æqualiter ab invicem remotis, harum Secunda, Quarta, Sexta, Octava, Decima, &c. (in locis paribus,) sint ut $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{105}{48}, \frac{945}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 * \frac{3}{2} * \frac{5}{4} \times \frac{7}{6} \times \frac{9}{8}$ &c.) Erit ut Secunda ad Tertiam, (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis $1, \frac{3}{2}$, interponendum,) sic Circulus ad Quadratum Diametri. (Ut autem Secunda ad Quintam, sic Triplum Circuli ad Quadruplum istius Quadrati, &c.)

Sequitur ex Prop. 118, 121, et 185.

PROP. CXCIV. *Theorema.*

SI sit æquabilis curvæ VC, axis VX, tangens in vertice VT, unde rectæ ad curvam ductæ (axi parallelæ & æqualibus interstitiis distitæ) secunda, quarta, sexta, octava, decima, &c. (in locis paribus) sint ut $1, \frac{3}{2}, \frac{35}{8}, \frac{315}{48}, \frac{3465}{384}$, &c. (qui numeri fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{3}{2} \times \frac{7}{4} \times \frac{9}{6} \times \frac{11}{8}$ &c.) Erit, ut secunda ad tertiam (hoc est, ut 1 ad numerum ipsis $1, \frac{3}{2}$, interponendum;) sic circulus ad $\frac{4}{3}$ Quadrati circumscripti (sive quadrati ex diametro;) Sive Triplum circuli ad Quadruplum quadrati circumscripti. (Ut autem Secunda ad Quintam, sic Triplum circuli ad Octuplum istius Quadrati. &c.)

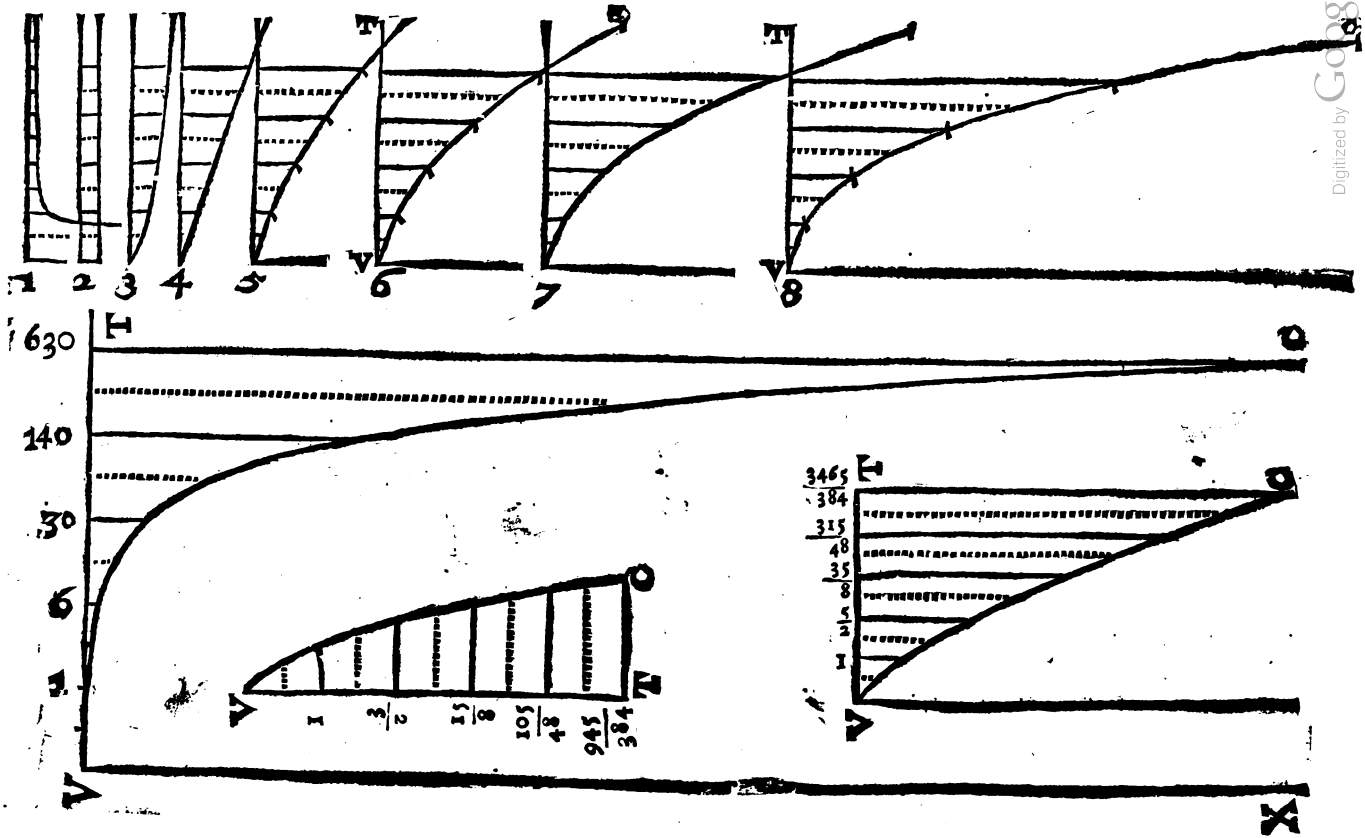
Patet ex præced. & Tabella prop. 189.

SCHOLIUM.

Et quidem hujusmodi aliæ propositiones innumeræ ex eadem Tabella (prop. 189) deduci possunt: formatis scilicet aliis atq; aliis ejusmodi curvis juxta istius Tabellæ tenorem.

Quales autem futuræ sint istæ omnes curvæ non adeo facile erit judicare. Hoc interim de quibusdam observare licet. Nempe

Digitized by Google


1
2
3
4
5
6
7
8
T
V
630
140
30
6
1
X
1
3/2
15/8
105/48
945/384
3465/384
315/48
35/8
5/2

Nempe; In ſerie ſexta, numeri (Triangulares) 1, 3, 6, 10, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3}$ &c) Sunt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Hyperbola; ut dictum eſt prop. 173.

In ſerie Quarta, numeri (arithmetice proportionales) 1, 2, 3, 4, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum $1 \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{4}{4}$ &c) ſunt ut quadrata ordinatim-applicatarum in Parabola: ſive ut rectæ in Triangulo; ut patet.

In ſerie Secunda, numeri (æquales) 1, 1, 1, 1, &c. (qui fiunt ex continua multiplicatione horum, $1 \times \frac{2}{2} \times \frac{3}{3} \times \frac{4}{4}$ &c.) ſunt ut quadrata rectarum (vel etiam ipſæ rectæ) in Parallelogrammo. ut patet. Adeoq; in Secunda & Quarta ſerie, pro curvis prodeunt revera rectæ, latus nempe illic Trianguli, hic Parallelogrammi.

In ſeriebus ſexta, octava, decima, &c. (alternatim ſumptis,) prodibunt curvæ magis adhuc compoſitæ, ſed quarum characteres non minus accurate deſignantur in dicta tabella, quam Parabolæ, Hyperbolæ aut Ellipſeos characteres noti.

In reliquis autem ſeriebus interjectis, prima, tertia, quinta, &c, (in locis imparibus,) provenient item æquabiles curvæ & regulares (quales puta pro Geometricis agnoſceret Carteſius,) quamvis earum characteres difficilius explicari poſſint, ut qui expoſitis ſerierum, in locis paribus poſitarum, characteribus ſunt intermedii juxta illam quam exhibuimus progreſſionis formam in prop. 187.

Qualiter autem ad aſpectum ſe præbent expoſitæ curvæ, (tam quæ locis paribus quam quæ imparibus conveniant,) ſingulis tabellæ ſeriebus indicatæ, oſtendit appoſita figura, quæ figillatim illas depictas exhibet, debitis ſuis menſuris ex eâdem (ut loquuntur) *Scala* deſumptis.

Notandum interim eſt (quod & ipſe aſpectus indicat,) quod convexitas curvæ VC (rectam VT verſus obverſa) quæ in curvarum ultima eſt maxima, (ſi retro computemus,) in anterioribus ſenſim decreſcit; donec in loco quarto curva illa in rectam (ſecantem) tranſeat (quæ inter convexam & concavam eſt media,) deinde loco tertio in concavam, ſecundo autem in parallelam, & in primo deniq; in recurvam, (quæ nempe ex iis partibus ad rectam continue appropinquat quibus reliquæ inde recedunt.) Item recta VT, quæ in quinta & ſequentibus eſt tangens

Digitized by Google

gens, in quarta rectam secat, in tertia fit curvæ diameter, in secunda fit parallela, & in prima deniq; Asymptota.

Quænam autem sint curvarum harum omnium affectiones, & quibus modis commodissime describantur, non libet mihi (fesso jam, varioq; & impedito itinere satis lassato) curiosius impræsentiarum inquirere; ut nec Hyperbolæ quadraturam ulterius (quam supra factum est) attingere. Et quidem fieri potest ut gratam nonnullis negotium vel ea tacendo præstiturus sim, quo liceat ipsis, indicata jam methodo, eisdem investigandis oblectari.

Eas autem omnes tales esse quales pro *Geometricis* haberi velit Cartesius, quo minus dubitem id facit, quod de locis paribus jam satis constet, detectis jamjam eorum characteribus; adeoq; & de locis imparibus (quamvis eorum characteres non ita commode designari possint) non aliter censendum est. Quales autem illæ sint Æquationes quæ singulis conveniant, ex ipso ordine patebit. Cum enim seriei quartæ conveniat æquatio Lateralis, sextæ Quadratica, octavæ Cubica, &c. (puta quarum suprema potestas est, Latus, Quadratum, Cubus, &c;) ad series interjectas tales necesse est æquationes pertinere quæ sint his intermediæ; (puta, quintæ, talis quæ sit quadraticæ & laterali intermedia; & de cæteris pariter judicandum.) An autem ejusmodi Æquationes sat commode possint recepto more designari, dubitandum forsan erit.

Mihi interim sufficiat (nec quidem susceptorum laborum pænitet) rem hactenus perduxisse; novamq; ingresso semitam, eandem aliis aperuisse: quæ quidem quò me duceret, in principio non adeo facile erat hariolari, sed quæ ad curvilinearum (saltem quarundam) quadraturam, aliaq; ejusmodi abstrusiora problemata, recta tendere videbatur. Nec quidem spem fefellit. Utut enim in Circulo, ratio ea quam habet ille ad Quadratum (quam mihi præ oculis etiam ab initio fuisse non nego) non ita plane ex voto se prodat, ut in aliis aliquot curvilineis, recepto aliquo notationis modo explicanda, (sed per varios Mæandros me deduxerit, & tandem in ἄῤῥητον quiddam desinat) Operæ tamen pretium est eatenus eam indicasse quatenus ipsa numerorum natura patitur; ut nihil insuper reliquum sit quam ut inter Mathematicos conveniat quâ velint notatione (sive mea sive alia adhuc ad arbitrium excogitanda) rationem illam

ἄῤῥητον

Digitized by Google

ἄρρητον indicare. In aliis autem curvilineis non paucis ita ex voto succesſerunt omnia (& quidem ſupra ſpem non raro,) ut innumeras Curvilineorum quadraturas, partim antehac planè incognitas, partim etiam cognitas quidem antea, ſed nova jam & faciliori methodo traditas, indicaverim: Aliaq; innumera ex intricatioribus Matheſeos problematis, (puta de Pyramidoidibus, Conoidibus, & Sphæroidibus, de linea Spirali, & Spaciis ipſi adjacentibus, de Paraboloidibus, aliiſq; paſſim,) vel primus detexerim, vel multum elucidaverim: Figuras item in infinitum continuatas (non unam aliquam, quod tamen a Toricellio factum, ſatis videbatur mirandum, ſed varias) tam planas quam ſolidas, ad menſuram notam & finitam reduxerim.

Facile quidem fuiſſet (modo libuiſſet) innumeras paſſim propoſitiones alias inſeruiſſe, (quod nemini harum rerum perito dubium eſſe poteſt,) cum ſit ea quam trado doctrina conſectariorum ſatis ferax. Et quidem in primoribus hujuſce tractatus partibus copioſius hujuſmodi conſectaria interſerui, ideo præſertim ut quo tenderet hæc doctrina indicarem. Verum in ſequentibus illud parcius proſecutus ſum, partim quòd jam ex præcedentibus eouſq; pateret methodus noſtra ejuſq; utilitas ut jam ſuo Marte poſſit quilibet id ipſe præſtare, partim etiam ne propoſitionum numerus (qui jam turgere videbatur) adeoq; totius tractatûs moles nimis excreſceret. Adeoq; multa paſſim in tranſitu leviter indicata ſunt, quæ, ſi libuiſſet curioſius proſequi, integram potius diſquiſitionem ſibi ſigillatim poſtularent.

Quod reliquum eſt; orandi ſunt harum rerum periti, ut quod nos præſtare valuimus candide dignentur acceptare, & ſiquid ipſis rectius obtigit in publicum Matheſeos augmentum impertiri.

LAUS DEO.

Index Propoſitionum.

Prop. 1. &c. *De ſeriebus Primanorum, ſive Arithmetice proportionalium finitis & infinitis, ad ſeries Æqualium comparatis.*
3. 4 *De Triangulo, & Conoidibus ſive Pyramidoidibus Parabolicis.*
5 &c. *Comparatio lineæ Spiralis & Peripheriæ*
14, 15, 16, *Comparatio Spiralis & Parabolæ*

Digitized by Google

19 &c De *seriebus Secundanorum, sive in Arithmetice-proportionalium ratione duplicata*
22 De *Cono & Pyramide ad Cylindrum & Prisma comparatis*
23 De *complemento Semi-parabolæ, ad Parallelogrammum comparato*
24 &c De *Figuris Spiralibus ad Circulum & Sectores comparatis*
39 &c *De Seriebus Tertianorum*
42 De *Complemento Paraboloidis Cubicalis*
43 &c De *seriebus Quartanorum, Quintanorum, aliorumq; in Arithmetice-proportionalium ratione multiplicata qualibet*
45 De *Complementis Parabolæ, & Paraboloidum Cubicalis, Biquadraticalis, Surdesolidalis, &c. ad Parallelogramma Comparatis. De spiralium item variis generibus ad Peripherias comparatis, & figuris illis adjacentibus comparatis ad Circulos & Sectores*
48 &c De *Conoidibus sive Pyramidoidibus, Parabolarum & Paraboloidum complementis aptandis; (quorum nempe Diametri vel Axes, sint Parabolæ aut Parabol. tangentes;) ad Cylindros & Prismata comparandis.*
53 &c De *seriebus Subsecundanorum, Subtertianorum, aliorumq; in Arithmetice proportionalium ratione Submultiplicata qualibet*
55 &c De *Parabolis & Paraboloidibus ad Parallelogramma comparandis.*
58 &c De *Seriebus Compositis*
60 &c De *Parabolis & Paraboloidibus omnigenis, ad Parallelogramma comparandis; eorum Conoidib. sive Pyramid. ad Cylindros & Prismata.*
64 *Theorema universale, de Seriebus præmissis omnibus ad seriem Æqualium Comparandis.*
65 De *Seriebus diversis invicem comparandis*
66 &c De *Seriebus (sive analogis Figuris) truncatis, earumq; segmentis invicem comparandis*
73 &c De *Seriebus invicem respective multiplicandis; & Figuris ejusmodi multiplicatione provenientibus*
81 &c De *Seriei unius ad aliam Applicatione, sive Divisione; & Figuris inde oriundis*
87 &c De *Seriebus Reciprocis; & Figuris interminabilibus*
102 &c De *Figurarum interminabilium area, sive earum ad Parallelogramma comparatione*
106, 107 De *Seriebus Reciprocis multiplicandis & dividendis, & Figuris inde oriundis.*
108 &c De *Æqualium serie, seriebus aliis respective mulctata; et Figuris item similiter mulctatis, vel excavatis.*
117 De *Seriei Æqualium, seriei Primanorum mulctatæ, Residuis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.*
118 De *Seriei Æqualium, serie Secundanorum mulctatæ, Residuis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.*

Digitized by Google

119 De Conoidibus & Pyramidoidibus ad Parabolæ vel Paraboloideos cujusvis ordinatim-applicatam aptatis

120 &c Comparatio Circuli sive Ellipseos ad quadratum Diametri sive parallelogrammum circumscriptum: Sphæræ item & Sphæroideos vel Pyramidoideos Elliptici, ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum

125 &c De Seriei Æqualium, serie Tertianorum, Quartanorum, &c. multatæ, Residuis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.

128 &c De Seriei Æqualium, serie Subsecundanorum, Subtertianorum, &c, multatæ, Residuis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.

129 De Conoidibus & Pyramidoidibus, ad Parabolæ, vel Paraboloideos cujusvis, Complementi Ordinatim Applicatam (diametro Parabolæ vel Paraboloideos parallelam) aptatis.

133 De seriei Primanorum, serie Secundanorum multatæ, Residuis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.

134 &c Comparatio circuli sive Ellipseos ad Parallelogrammum; & Sphæræ vel Sphæroideos ad Cylindrum

139 &c De Seriei Primanorum, serie Tertianorum, Quartanorum, &c, multatæ, Residuis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c.

145, 146 De Seriei Secundanorum, Tertianorum, Quartanorum, &c, aliis seriebus multatæ, Residuis, eorumq; Quadratis, Cubis, &c

147 &c De Serie Subsecund: multata serie Primanorum, Secundanor: Tertianorum, &c, vel etiam Radicum quadraticarum Tertian: Quint: &c

154 De Seriebus Subtertianorum, Subquartan: &c, multatis

155 &c De Seriebus Auctis; earumq; aggregatorum Quadratis, Cub: &c

162 &c Comparatio Conoideos vel Pyramidoideos Hyperbolici, ad Cylindrum vel Prisma circumscriptum; ipsiusq; Hyperbolæ ad circumscriptum Parallelogrammum.

166, 167 De Seriebus in Series inversas respective multiplicandis.

168 Circulus ad Quadratum Diametri, ut 1 ad quantitatum nota □ designe

169 &c De tabella numerorum figuratorum interpolanda: & quantitatis □ investigatione

171 &c Investigatio characteris numeri Triangularis; Deq; ipsis numeris Triangularibus interpolandis

176 &c Investigatio Characteris numeri Pyramidalis, Triangulipyramidalis &c. Et de ejusmodi numeris interpolandis.

184 Interpolationis inceptæ continuatio.

185 &c De Seriebus Tabellæ numerorum figuratorum interjectis, eaiũq; Characteribus &c. ipsaq; Tabella, quantum numerorum natura patitur, completa.

191 Quantitatis □, in numeris absolutis quam proxime designatio.

192 &c Ejusdem designatio in lineis.

FINIS.

Digitized by Google

Math 8° 390

Johannis Wallisii, S.S. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,

OPERUM
MATHEMATICORUM
Pars Altera:

Qua Continentur

De Angulo Contactus & Semicirculi, Disquisitio Geometrica:
De Sectionibus Conicis Tractatus.
Arithmetica Infinitorum: sive de Curvilineorum quadraturâ, &c.
Ecclipseos Solaris Observatio.

OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Veneunt apud OCTAV. PULLEIN *Lond. Bibl.* 1656.

Digitized by Google

Digitized by Google

AD LECTOREM.

NOn multa sunt (Erudite Lector) quibus te in limine morabor. Statueram apud me, cum his quos habes, tractatus alios aliquot emisisse; adeoq; huic parti aliam vel conjunxisse vel potius præmisisse; quam quidem eodem circitèr tempore inceperant Typographi quo præsentem. Sed cum viderim operarum moras majores esse quam speraveram, mallem (amicis id desiderantibus) hanc quam absolverant partem in antecessum emittere; quam secutura est altera cumprimum per Typographos licebit. Interim, his fruere: quibus, si Arithmeticæ (ut loquuntur) Speciosæ, seu Symbolicæ, assuetus sis, haud (spero) admodum hærebis, cum ego omnia qua potui perspicuitate tradere sim conatus; sin ea adhuc carueris, poteris vel ex Oughtredi *Clavi Mathematicæ*, vel Schotenii *Principiis Matheseos Universalis*, eam tibi familiarem reddere; vel, nisi prius id feceris, ex iis quæ nos brevi (favente Deo) sumus edituri.

Errores quod attinet Typographicos, sunt quidem illi (si insuetum Typographis nostris operis genus, & calculi multiplicitatem, spectes) non adeo multi, nec quidem plures (fortasse etiam pauciores) quam in minoris difficultatis libris solent occurrere; quos observavimus tamen, qui alicujus sint momenti, notare mallem quam (quod solent multi) dissimulare; ut eos (& siquos alios ipse deprehenderis) calamo emendes.

Ang: Contact: p. 15. l. 16. *Geometricè* p 30 l: 1 *Si enim peripheria EA*, p 32 l: 15 *planæ*: p 45 l: ult: *BCA, BA*. p 48 l 2 *9 tamen*, p 50 l 7 *puncto P*.

Con: Sect: p 23 marg: *non sep-* p 32 l 23 *anſam*, p 38 l 7 *ld* — p 40 l 1 *hujus*, p 52 l 17 $\frac{4a^2 \mp 4da + a^2}{4a^2}$ p^2 — $\frac{d \mp a}{d}$ p^2. p 53 l 19 *aF*, p 54 l pen: *rectam*. p 55 l 12 *PF. Pa* :: p 59 l 8 *quotlibet*, p 64 l pen: $t = \frac{d^2 l}{dl - c^2}$ p 66 l 11 *a centro* p 68 l ult: *transversæ*, p 69 l 22 $t - d \mp a$, p 71 l 27 A a, p 73 l 3

Digitized by Google

c.d::x, l pen: $\pm 2rydxcq$, p 74 l ult: $\frac{\sqrt{\delta\xi}lx}{\sigma}$, p 75 l 1 $\pm\delta\xi e^2 \pm 2yc\sqrt{\delta\xi}dx$ l 5, $e^2 = DQq$, p 75 l 15 *sunt et*, p 83 l 8 d^2: *Horum*, l 19 $t = \frac{d^2 l}{b^2 - dl}$, p 86 l 13 $f^2 a^2 \pm f^2 ta$, l 14 $\pm f^2 a \pm f^2 t$, p 87 l 4 HA.HF, p 91 l $\delta^2\zeta^2$, l 4 $2\sigma + \delta = \zeta$, ib $\pm 2\sigma yqq$, p 92 l 16 DA.Da, l 18 $\frac{\gamma dz}{cc}$, l 19 $\sqrt{\delta\zeta}dz$, l 20 $\pm 2yc\sqrt{}$, p 93 l 1 $\delta\zeta^2 \pm 2y\sqrt{}$, l 4 *sunt pun-* l 12 *hyper-* l 24, 25 CHa p 94 l 4 *prop:* 32, p 103 l 21 *uponuntur*, p 106 l 21 $3f^2da +$, p 109 l 21 $\pm pD$, l 29, 30, $9dq^2$, p 111 l 24 *est Diam.*

Arithm: Infin: p 16 l 15 *maxime*; l 23 l^2, l 26 *subtriplam*, p 23 marg: *prop:* 24, p 27 l 26 *vero continentia*, p 33 l 26 *maxime*, p 34 l 27 *primo* 0, *secundo* 1, lin 29 $+ \frac{n}{12l^2}$, lin: 30 $- \frac{1}{12}nl^2$, p 35 l 8 *prop.* 182, p 36 l 15 *seriem*, p 38 l 19 *habeat*, p 49 l 5 *pyramidoidea*, p 70 l 16 *divisor*, p 77 l 18 ADββ lin: ult: *huic*, p 78 l pen: *radicum*, p 79 l 22 *sub secundanis*, p 83 l 6 *acuto*, p 87 l 20 $1 + \frac{4}{5} = \frac{2}{5}$, p 89 l ult: *vel* $\frac{2}{5}$, p 91 l 14 $R^2 + 2aR + a^2$, l 22 dele *prop:* 121, p 93 l ult: a^2, p 93 l 3 ADβ p 97 tab: l 1, 120, l 3, 582+0, l 4, 9945, l 5 1056, p 98 l 6 $\frac{a+1}{a} \times \frac{2a+1}{2a} \times \frac{3a+1}{3a}$, p 99 tab: l 3, 29160, l 4, 45, & 12288 0, p 100 l 9 ++++++, p 103 tab: l 3, 1 + 3, l 4, 1 + 4, p 107 l 15, $2aD + a^2$, l 17 $+a^2$ & $- a^6$, l 25 *maximo*, p 108 l 8 *lipsem*, l 15 $4aD -$ $16a^2$, l 19 *ductam*, p 112 l 14 *rectas Trianguli inscripti*, l 17 $\frac{2\times4\times6\times8}{5\times7\times9\times11\times13}$ p 113 l 4, $- \frac{1}{13} = \frac{81}{1820}$ AD^{12}, l 5, $4\times7\times10\times13$, p 114 tab: l ult, $4\times11\times18\times25$, p 118 l 18, $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$, p 124 l 17, $+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$, p 125, l 5 $\frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, l 15, $+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}$, p 127 l 16, $\frac{1}{2}$ ADT $\times \frac{1}{3}$ AD^2, p 129 l 8 *habeat*, p 131 l 13, $10\sqrt{3}$, p 132 l 5, 6, *ad* 7×6, p 133 l ult: $\frac{1}{6}$, p 136 l 31 *qui in secunda, laterales; qui in tertia*, p 147 l 16 *triangularium*, p 148 l 2, 720, p 152 l 32, $\frac{1}{\infty}$ B, *erit*, p 162 tab: l ult: 15, 23, & 70, p 163 l 1 *expeditius*, p 165 l 15 *meminimus, nempe*, p 177 l 27 *calcatos*, p 184 l 1, 4Fq + 8F, lin: 7, 649 Fq.

Digitized by Google

Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,

DE ANGVLO CONTACTVS ET SEMICIRCULI

Disquisitio Geometrica.



OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Veneunt apud *Octav. Pullein*, Lond: Bibl. *Anno* 1656.

Digitized by Google

Digitized by Google

Insignissimis Viris

D. BENJAMINO WHICHCOTO, S. T. D.
Collegii Regalis Cantabrigiæ Præposito;

D. THOMÆ HORTONO, S. T. D.
Collegii Reginalis ibidem Præsidi;

D. ANTHONIO BURGESIO, Rectori Ecclesiæ *Suttonensis* in Agro *Warwicensi*.

JOHANNES WALLIS *Geom. Prof.* *SAVILIANUS* Oxoniæ. S.

CUm, *supremo sic favente Numine, (Insignissimi Viri) prima studiorum Academicorum principia me posuisse contigerit in florentissimo Collegio*, Emanuelis *dicto*, Cantabrigiæ, *cui vos Consocii (cum aliis dignissimis doctissimisq; Viris) regendo tunc temporis præfuistis; & quidem sub vestra omnium successive peculiari tutela; istius ego & loci & temporis & personarum mihi omnino recordandum esse censeo: (Quippe ingrati ratus, unde & a quibus quis profecerit, oblivisci:) Adeoq; hoc opusculum, utut exiguum, grati tamen animi testimonium, vestris inscribendum nominibus.*

Quam felix prosperumq; hactenus fuerit Emanuelis *illud Collegium, ab Honoratissimo Equite* GUALTERO MILDMAIO *prudentissimo piissimoq; Viro (*ELIZABETHÆ, *tunc Angliæ Reginæ, a Privatis Consiliis,) annis abhinc septuaginta circiter, feliciter & auspicato fundatum; non est quod ego, vestris præsertim auribus, multis exponam. Id saltem ausim dicere, (quod nec*

Digitized by Google

nec quemquam negaturum autumo,) vix ullum utriusvis Academiæ Collegium, pari tempore, majori tum pietate tum doctrina floruisse, plureſve in meſſem Dei fideles ſeduloſq; operarios immiſiſſe; indeq; haud facile eſt dictu, quanta Deo ſeges accreverit, quantum pietatis efficacis incrementum. Argumento eſſe poteſt nuperus Theologorum Conventus Weſtmonaſterienſis, authoritate Parliamenti ex variis Angliæ partibus undicunq; convocatus, doctiſſimis, prudentiſsimis, & vere piis Theologis refertiſsimus, (qualem ego, neſcio numquis alius, ſi doctrinam pariter & conjunctam pietatem ſpectemus, nec ſimilem unquam vidi, neſcio an viſurus;) quorum præterpropter pars tertia ex hoc uno Collegio aliquando prodierant; quippe, ex centum circiter Theologis, plures quam triginta Emanuelis *fuerant Collegio enutriti cum tamèn Collegiorum & Aularum utriuſq; Academiæ numerus quadragenarium ſuperet. Simili argumento eſt, quod, præter ingentem eruditorum numerum, hinc, tanquam ex refertiſsimo alveario, ad curas partim paſtorales, partim ad alia utriuſq; Academiæ Collegia, promotionis ergô, abunde tranſmiſſorum, etiam nunc temporis (Anno* 1655 *currente) ex ſexdecim totidem Collegiorum Ædiumve Præfectis* Cantabrigiæ, *undecim ex hoc uno* Emanuelis *Collegio prodierunt. Quæ omnia nonniſi peculiari Numinis benedictioni in fundationem illam ſincero animo poſitam referenda ſunt, cum non aliàs huic adſint præ Collegiis aliis incitamenta ulla vel emolumenta, quibus illa videantur attribuenda. Cæterum Deus Optimus Maximus & florentiſsimam illam ſocietatem, (cujus vos olim pars fuiſtis, & etiamnum eſtis ornamenta,) & vos item, veſtraq; omnia feliciter ſoſpitet, promoveatq;, in ſuam ipſius gloriam, veſtrum ipſorum commodum, & totius Eccleſiæ incrementum.*

Digitized by Google

De Angulo Contactûs, & Semicirculi, Disquisitio Geometrica.

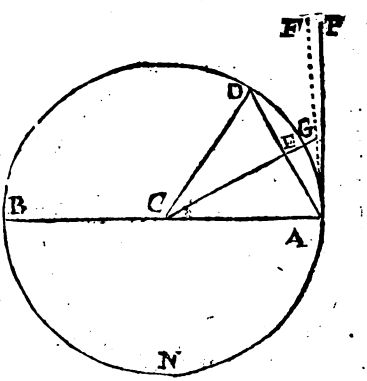
CAP. I.

Ansa & status Controversiæ.

QUoniam illi, quæ sequitur, Controversiæ ansam dedit Propositio 16ª Libri 3ⁱ Euclidis; illam integram primùm apponendam duxi, ejusq; demonstrationis summam.

Ἡ τῇ διαμέτρῳ τοῦ κύκλου πρὸς ὀρθὰς ἀπ' ἄκρας ἀγομένη, ἐκτὸς πεσεῖται τοῦ κύκλου· καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας, ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται· καὶ ἡ μὲν ἡμικυκλίου γωνία, παντὸς ὀξείας γωνίας εὐθυγράμμου μείζων ἐστίν· ἡ δὲ λοιπὴ ἐλάττων.

"Quæ circuli diametro (AB) ad angulos rectos ab extremitate ducitur recta (A P) "cadit extra circulum. 2. Et "in locum qui inter rectam "(A P) & peripheriam "(DEA) interjicitur, altera "recta (ut FA) non cadet: "3. Et Semicirculi angulus "(EAC) major est omni "angulo acuto rectilineo: "4. Reliquus autem (EAP) "minor;



"Nam 1º si caderet perpendicularis illa intra circulum, ut AD (vel etiam si jaceret in ipsa peripheriâ) essent anguli DAC, "ADC, æquales, per 5e 1, ideoq; uterq; rectus; contra 17e 1. "2º Si recta FA (inter peripheriam & perpendicularem PA) cadere

Digitized by Google

" cadere possit, ducatur ad illam perpendicularis ex centro " CEG; quoniam igitur angulus rectus CGA major est acuto " CAF (ut qui pars est recti CAP,) esset, per 19 E 1, latus CG " minus quam CA, hoc est, minus quam CE, pars sui. Pars " 3a & 4a sequuntur ex secundâ.

Occasione sumpta ab hac Euclidis Propositione, gravis orta est controversia (quod mirum est, in re pure Geometrica,) inter Peletarium & Clavium; quæ, quod sciam, nondum unanimi Mathematicorum consensu determinationem nacta est.

Primus, quod sciam, Peletarius asserit, *Angulum* qui dicitur *Contactus*, seu contingentiæ, non esse revera *Angulum*, nec omnino *Quantitatem*; sed Rectam, quæ Circulum tangit, cum Peripheria coincidere, non autem ad illam inclinari. Angulum autem Semicirculi omnino Rectum esse, & recto rectilineo æqualem.

Contra, Clavius asserit illum vere Angulum esse, & quidem quantitatem in infinitum divisibilem, non quidem per lineam rectam, at saltem per Peripheriam majoris circuli; minorem tamen quàm est ullus rectilineus possibilis: Angulum vero Semicirculi minorem esse angulo recto rectilineo, majorem tamen quovis rectilineo acuto.

CAP. II.

Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse.

ILLud autem ego primum præmonendum esse judico: Controversiam hanc ab Euclide diremptam non esse, (quanquam ex illius principiis dirimi posse non dubitem.) Probat enim Euclides, & recte quidem, Angulum semicirculi majorem esse omni Acuto rectilineo; an verò sit Recto rectilineo vel minor vel æqualis, non dicit: utrumvis autem dicatur, manet Euclidei dicti veritas, modò non sit acuto minor: Item, Angulum contactûs (nempe siquis sit) minorem esse omni rectilineo, quia scilicet nec æqualis, nec major est; at verò, an sit omnino quantitas necne, non dicit; nec quidem, si dixisset, posset allata demonstratio id confirmare: nam & illud quod asserit verum manet, etiamsi suppositus ille angulus contactûs nihil sit; quod enim omnino nihil est, est certè omni positivâ quantitate minus.

Si

Digitized by Google

Si verò voluisset Euclides affirmâsse, Angulum semicirculi minorem quidem esse quàm est rectus rectilineus, majorem autem quovis acuto rectilineo; oportuisset illum utrumq; membrum probasse: nempe, non modo angulum semicirculi majorem esse omni acuto rectilineo (quod quidem verum est de recto rectilineo, aut etiam obtuso;) sed & minorem recto esse; hoc autem nec probat Euclides, nec quidem omnino asserit. Et similiter de Angulo Contactus; si affirmâsse voluisset, Angulum qui dicitur Contactûs, verè quidem Angulum esse, & reverâ Quantum, minorem tamen omni acuto rectilineo; oportuisset utrumq; membrum probasse. At ille solummodo probat, Angulum contactus saltem minorem omni angulo rectilineo; an verò sit revera Quantus necne, nec probat, nec affirmat, sed prorsus silet. Non autem putandus est Euclides, acutissimus demonstrator, qui ne ullum paralogismum usquam admisit, (fatente ipso Ramo, qui tamen fatetur se dedita operâ illud quæsiviisse, quíq;, ut notum est, sat severus, nequid gravius dicam, in Euclidem judex erat,) non putandus, inquam, est Euclides, tantam παροψιδα admittere voluisse, ut ubi duo sat distincta propositionis membra (vel; si placet, duas propositiones) affirmâre voluerit, non nisi ipsorum unum demonstraret.

At vero, quanquam Euclides neutrum horum dixerit, nempe, nec angulum semicirculi minorem esse recto rectilineo, nec etiam angulum contactus esse revera quantum, oppositam tamen opinionem, quamvis fortasse non verbis Euclidis, ipsius tamen sententiæ contrariam esse, contendit Clavius. *Si enim*, inquit, *Euclides sensisset angulum contactus nihil prorsus esse, & angulum semicirculi æqualem recto rectilineo: quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret angulum contactus esse minorem omni acuto rectilineo, angulum vero semicirculi majorem? Quid enim clarius, quàm, Nihil, cujusmodi est angulus contactus ex Peletarii sententia, minus esse quocunq; angulo? Quid quæso magis perspicuum, quàm, angulum rectum, qualem ponit Peletarius angulum semicirculi, majorem esse quolibet acuto?*

Verùm ego, quæ esset Euclidis hac in re sententia, non obstante hoc Clavii ratiocinio, fateor me non satis assequi. Euclides certè, quod sciam, suam hac de re sententiam nusquam profert. Illam vero ex Clavii ratiocinio satis patescere prorsus nego. Certum enim est, Euclidem aliquando minus asseresi

re, quàm & asserere potuisset, & ipse senserit; sive quod nondum opus esset totum quod senserit producendi, sive quod nondum ex prædemonstratis commodè ostendi posset, sive alia forsan aliquando de causa. Exempli loco sint propositiones 16ª & 17ª primi. Prop. 16. sic est, *Trianguli uno latere producto, externus angulus utrolibet interno & opposito major est.* An verò ex hac propositionis forma dicendum est (juxta quod Clavius hic arguit de angulo contactûs) *Si Euclides sensisset angulum externum æqualem esse duobus internis oppositis simul sumptis, quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret utrovis majorem esse? quid enim clarius est, quàm, quod duobus simul sumptis est æquale, eorum utrovis sigillatim majus esse?* Prop. 17ª hæc est, *Trianguli duo anguli sunt duobus rectis minores omnifariam sumpti:* At (juxta Clavii ratiocinium) *Si Euclides sensisset, tres simul angulos æquari duobus rectis, quid, obsecro, tantopere desudâsset, ut demonstraret, eorum duos minores esse duobus rectis? quid enim magis perspicuum, quàm, quod tribus simul æquale est, eorum duobus esse majus?* An autem hinc concludere licet, vel, Angulum externum non esse æqualem duobus internis oppositis simul sumptis? vel, Tres angulos trianguli rectilinei non esse æquales duobus rectis? vel, Euclidem non ita sensisse? Nullo modo; nam & ea utraq; sic esse, & Euclidem illud non ignorasse, liquet ex 32 e 1. ubi illa & affirmantur & demonstrantur. Sed & etiamsi propositio hæc 32ª deesset, non tamen essent 16ª & 17ª vel minus veræ, vel minùs legitimè demonstratæ: verum quidem esset, Euclidem ea de re sententiam suam minus exposuisse. Pariter & de 16 e 3 dicendum est. Affirmat scilicet Euclides, Angulum semicirculi majorem esse quolibet acuto rectilineo, Angulum verò contactus quolibet acuto rectilineo minorem: quod autem attinet ad controversiam Peletarium inter & Clavium, prorsus tacet, neque suam sententiam omnino exponit; angulum nempe semicirculi recto rectilineo æqualem, neq; ait, neq; negat; angulum item contactus neq; negat, neq; affirmat, verè quantum esse.

Sed & eodem modo abstinet in 31 e 3 (ubi tamen locus esset opportunus suam ea de re sententiam proferendi:) affirmat enim, " *Angulum in semicirculo, rectum esse; in segmento majori, minorem recto; in minori segmento, majorem; item Angulum majoris segmenti majorem recto, minoris, minorem;* angulus autem *semicirculi* quantus sit (quamvis illud statim exspectandum esset) non dicit

cit, sed cautè abstinet, sive quod ipsi forsan vix constiterit quid erat dicendum, sive quod non præsto fuerit demonstratio quâ suam sententiam confirmet. Sed & veteres (quod sciam) omnes (præter unum Proclum) câ de re prorsus tacent.

Non diffiteor quidem Recentiorum aliquot, magnos viros, & ex veteribus fortasse nonnullos (saltem Proclum) de angulo contactus ita loquutos esse, acsi haberet anguli quantitatem; adeóq; de angulo semicirculi tanquam minori quàm est angulus rectus rectilineus. Sed argumentis hac in re agendum est, non authoritatibus: præsertim cùm ex veteribus nemo, quod sciam, quidquam hac in re demonstrasse repertus sit.

CAP. III.

Anguli Plani natura & definitio explicantur.

VT rem igitur controversam intimiùs aggrediar, inchoandum erit a natura *Anguli plani*; quem Euclides sic definit 8 d 1. "*Angulus planus est mutua κλίσις, seu inclinatio, duarum linearum in plano sese tangentium (ἁπτομένων) & non directum positarum.*"

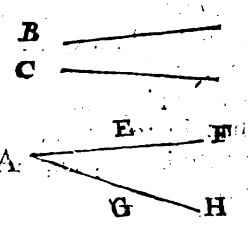
Peletarius hanc definitionem paulò immutatam mallet; ut nempe de linearum mutuo sese *secantium* concursu tantùm intelligatur. Verùm nulla necessitas cogit hujusmodi mutationem fieri. Quamvis enim, juxta Peletarium, solas illas lineas angulum continere, dicendum sit, quæ, si producantur, se mutuo secabunt: non tamen minùs verum erit, juxta eadem principia, easdem solùm lineas mutuò inclinatas concurrere: quæ enim suadent, circumferentiam cum recta contingente angulum non continere; eadem etiam suadebunt, has lineas mutuò inclinatas non esse: Ita ut non sit opus, ob hanc sententiam, Euclidis definitionem mutare.

In Euclidis verò definitione, notandum est primò, duarum linearum mutuam κλίσιν, seu inclinationem ad invicem, requiri. Ideóq; si quæ lineæ concurrant, nec tamen inclinentur ad invicem, angulum non constituent, quia nempe angulus, ex definitione, est linearum mutua inclinatio.

Deinde vero, non quævis linearum inclinatio, Angulus dicitur: sed linearum concurrentium, sive se mutuo tangenti-

Digitized by Google

un ἁπλουάνων (nam ἁπλόος apud Euclidem dicitur de quocunq; recta, seu concurrencia; at περιφερὴς de contacta κατ' ἐξοχὴν, qualis definitur 2 & 3 d 13.) Quamvis enim lineæ distantes in eodem plano, inclinari ad invicem dici possint, ut B, C; non tamen angulum constituunt, nisi concurrant.



Et quidem ipsæ concurrentes lineæ, quamvis totæ forsan inclinentur ad invicem, angulū tamen non alibi quam in ipso puncto concursus formant. Verbi gratia, lineæ A F pars quælibet ad lineam A H inclinatur; at non harum linearum partes quælibet, puta E F, G H, angulum formant, sed earum tantùm extrema, in communi puncto A concurrentia: Et quidem quantacunq; utriusvis pars alia abscindatur, modo tantillum supersit ut concursus conservetur, angulus omnino invariatus manet; idem enim omnino angulus est qui cruribus A F, A H, & qui cruribus A E, A G, continetur.

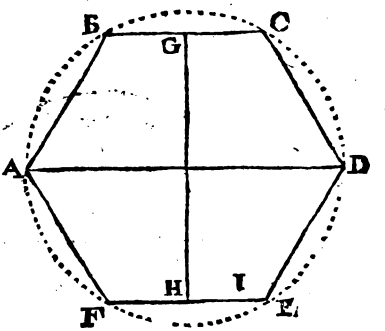
Non igitur ex linearum concurrentium inclinatione qualibet, judicatur Angulus, (si nempe ita se habeant lineæ concurrentes, ut hic magis, illic minùs inclinentur,) sed ex illa quam sortiuntur inclinatione in ipso concursus puncto. Ideoq; angulus, quem facit perimeter Hexagoni A B C D E F cum recta A D, non æstimandus est ex quacunq; inclinatione quam habet perimeter in quacunq; sui parte ad rectam A D, (puta in parte B C) sed ex ea quam habet in punctis concursus A, D: sic angulus, quem facit cum recta G H, non ex inclinatione quam ubivis habet perimeter ad illā rectam, (putà quam habet in partibus A B, vel E D) sed quam habet in ipsis punctis concursus G, H.

Et quamvis dici possit, Perimetrum Hexagoni describi, non esse lineam unam, sed ex variis (puta A B, B C, C D, D E, E F, F A,) aggregatam; ideoq; fallaciam πολυζητήσεως committi, si de inclinatione ejusmodi perimetri ad rectam quæratur: Idem tamen omnino eveniret, si, pro perimetro figuræ rectilineæ, ponatur peripheria, vel alia linea curva, cujus inclinatio ad quamvis rectam propositam non eadem manet (prout in rectis fieri solet,) sed in singulis punctis variatur, quamvis interim linea

isthæc

Digitized by Google

ista hæc curva pro unica linea habeatur. Non enim peripheriæ segmentum BC (aut quodlibet ipsius punctum) eandem inclinationem habet ad rectam AD, quam habet ipsius peripheriæ segmentum AB (aut quodvis ipsius punctum,) ad eandem rectam: Patet enim, ipsius segmenti BC situm magis ad parallelismum accedere, at segmenti AB propius ad perpendiculum: Angulus autem quem facit ea peripheria cum Diametro AD, non æstimandus est secundum inclinationem segmenti BC (aut alicujus in eo particulæ) sed secundum illam quam habet perimeter in sui particula contigua, seu potius in ipso puncto concursus.



Deniq; , additur in illa definitione Euclidea, phrasis hæc, *μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων, non in directum positarum*: unde innuitur, lineas in directum positas angulum non comprehendere. Non autem vult Euclides, per *lineas in directum positas*, lineas tantummodo rectas continuatas, sive duo segmenta contigua ejusdem rectæ: sic enim continuata peripheria, in singulis sui punctis, angulum formare dicenda esset, quod tamen nec Euclides, nec alii solent affirmare: Sed, per *lineas in directum positas*, eas intelligit, quæ sese mutuo continuare dici possunt, ut exinde una linea fiat. Atq; hactenus Anguli plani naturam, quantum opus videtur, explicavi.

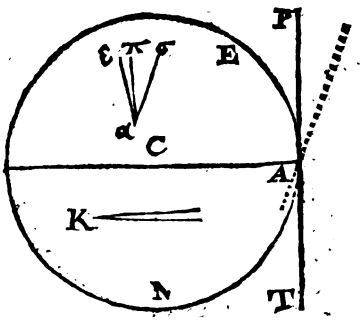
CAP. IV.

Argumentum primum, ab Anguli plani natura petitum.

His prælibatis, videamus quid in hac controversia, utrinq; dici potest.

Qui angulum semicirculi recto rectilineo minorem asserunt, nituntur

Nituntur communi huic notioni, *Totum est majus sua parte*, vel, pars toto minor. At, inquiunt, semicirculi Angulus C A E, est pars anguli recti rectilinei C A P; ergo est recto minor; &



quidem tanto minor quantus est angulus interjectus E A P, qui est angulus contactus.

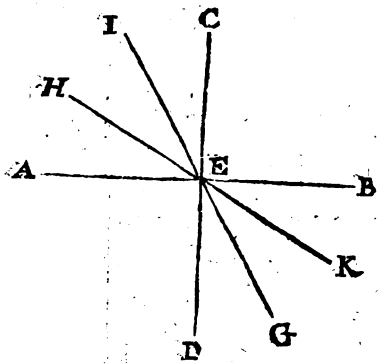
Peletarius contra, negat angulum semicirculi minorem esse recto rectilineo, aut recti partem esse, sed toti recto æqualem; quia scilicet angulus contactûs (qui auferri supponitur ex recto, ut restet angulus semicirculi) est non-angulus, ejusq; quantitas nulla: at qui aufert angulum tantummodo imaginarium, ille nihil aufert, & ejusmodi imaginaria ablatione quantitas non omnino minuitur, sed eadem, quæ prius erat, invariata manet.

Cardo igitur controversiæ hic est, An qui dicitur Angulus contactûs sit verè Angulus, verámq; anguli quantitatem habeat, ut vult Clavius; vel revera non-angulus, ut vult Peletarius, sed tantum angulus imaginarius, qui veram anguli quantitatem nullam habeat.

Ut hoc explicatius daret *Peletarius*, hujusmodi diagramma proponit. Duabus rectis A B, C D, se mutuo secantibus in puncto E ad angulos rectos; si intelligatur recta C D, puncto E fixo, circumvolvi, ubi pervenerit ad situm F G, ex angulis rectis fiunt obliqui (hinc acuti, illinc obtusi,) qui fient adhuc magis

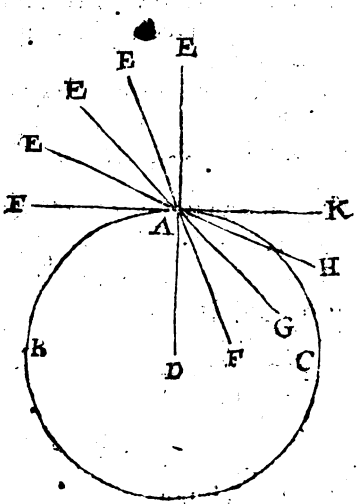
Digitized by Google

magis obliqui cum perventum erit ad situm HK, & sic deinceps, donec perveniatur ad AB; tunc enim cessabit intersectio,



& simul angulus evanescet, quoniam non jam ad rectam AB inclinabitur, sed in ipsa jacebit immersa.

Neq; secus, inquit, est in curvo. Si enim DE, recta per centrum, peripheriam BAC secans in puncto A, super eo circumducatur per puncta FGH, fient anguli continuè varii cum peripheriâ, donec, cessante sectione, linea ED facta sit EK, ac tangat circulum. Atq; jam linea ED vel EK non inclinata intelligitur, sed immersa in ipsa BAC peripheriâ, quantum ad angulum attinet, non aliter quam si ipsa BAC esset linea recta.



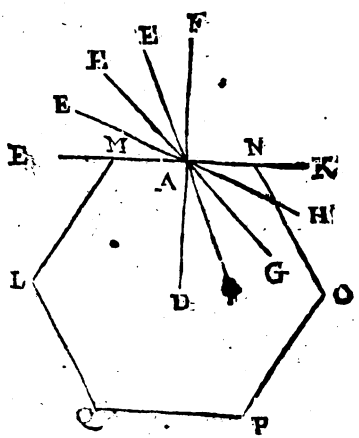
Illud, credo, vult Peletarius; Rectam ED, cùm perventum est ad situm EK, (ubi desinit peripheriam secare, & facta est

C tangens,

Digitized by Google

tangens,) non jam inclinari ad peripheriam, sed super ipsam ἐκλινῶς jacere, & cum ipsa coincidere, eousq, scilicet dum peripheria supponitur eandem inclinationem retinere quam habuit in ipso puncto A: Quòd autem postea quasi resiliat peripheria a recta E K, ideo factum est, quia peripheria suam inclinationem (ut et aliæ curvæ) subinde per singula puncta mutat, adeóq; ipsius inclinatio, quæ in puncto A nulla erat, quum primum ab eo puncto recessum est fit aliqua, quæ & deinceps continuò variatur, omnésq; possibiles variationes admittit.

Hoc autem fortasse melius concipietur, si, pro circuli peripheria, substituamus figuræ rectilineæ perimetrum: si igitur D E, perimetrum Hexagoni secans ad angulos rectos in puncto A, super illo circumducatur per puncta F, G, H, angulos continuo magis obliquos faciet usq; dum ad situm E K perveniat, hic enim cessat sectio, & evanescit angulus: ipsa enim E K in Hexagoni perimetro ἐκλινῶς jacet, & cum ipsa coincidit; non tamen cum tota perimetro, (neq; quidem ipsa tota, si saltem producatur,) sed cum ista perimetri parte M N quæ eandem retinet inclinationem quæ fuit in puncto A; at vero quum primum perimeter suam inclinationem mutat, in punctis M, N, deserit statim rectam perimeter & ab illa resilit, suamq; subinde inclinationem aliquoties mutat in punctis O, P, Q, L: adeóq; inclinatio perimetri respectu rectæ tangentis E K, quæ in puncto A nulla erat, fit subinde alia atq; alia. Quæ autem in figura rectilinea contingit inclinationis in singulis lateribus variatio, ea in circulo contingit in singulis punctis: unde recta E K, quæ figuram rectilineam contingit per integrum latus M N, (cum quo nullum igitur angulum facit,) eadem circulum non contingit

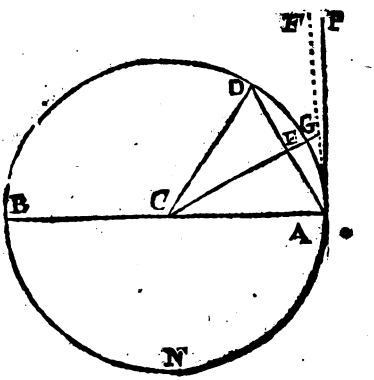


Digitized by Google

tingit nisi in unico puncto, ipsiq; soli ἀκλινῶς coincidit, adeóq; angulum non facit. Atq; ita sententiam Peletarii, quanta potui perspicuitate, proposui.

His ita explicatis, hoc modo licebit argumentum formare. Ubi linearum concurrentium nulla est inclinatio, (sive propter coincidentiam illud fiat, sive propter continuationem) ibi nullus est angulus, (est enim angulus mutua concurrentium inclinatio, per 8 d 1.) at circumferentiæ ad rectam tangentem, in puncto contactûs, nulla est inclinatio, (ut ex præexplicatis patet:) ergo nullus ab ipsis fit angulus. Angulus igitur, qui Contactûs dicitur, est angulus tantùm imaginarius, non vere angulus Quod erat ostendendum.

Ad ulteriorem confirmationem minoris propositionis in hoc argumento, præter ea quæ jam dicta sunt, poterit & hoc, si o-



pus fit, breviter adjungi. Si circumducta semi diameter CB, circa centrum C, extremo suo puncto B, describat peripheriam BEAN; punctum B motu suo ante contactum in puncto A verget ad rectam tangentem AP, post contactum ab illa resilit, at in ipso contactûs puncto indifferenter se habet ad utrumq;, nec appropinquat enim nec elongatur, sed neq; rectam transit, continuatur tamen uniformiter motus: At motus invariatus, qui ad assignatam in eodem plano rectam neq; accedat, neq; ab ea recedat, neq; tamen transeat, quo pacto inclinatus dici possit, non video; (neq; enim versum inclinat, neq; retrorsum, nec tamen

men transit,) vel enim propter linearum coincidentiam, vel saltem parallelismum, fieri dicendum erit.

Qui autem secus sentiunt, idem videntur affirmare, (ut familiari utar instantia,) acsi dicerent, ambulantem in circulo Horizontali a puncto Meridionali N (ubi Orientem versus spectat) donec continuato itinere per punctum Orientale A, ad puncta E, D, perveniat (ubi Occidentem versus spectat,) nec tamen interim unquã directè spectet Septentrionẽ. Nam siquando directe spectet Septentrionẽ, erit certe cũ in puncto A exiſtit, (prius enim aspectus ad Orientem declinat, postea verò ad Occidentem) si verò in puncto A directe spectet septentrionẽ, (neq; ad Orientem neq; ad Occidentem declinans,) erit certe in illo puncto A tendentia circuli (cujus ductum sequitur incedens) versus punctum P, (nam recta A P erit linea meridionalis, ut quæ lineam Orientis & Occidentis A B transversim secat ad angulos rectos,) adeóq; in illo puncto eadem erit tendentia tam circumferentiæ quàm rectæ tangentis; nullus igitur angulus, sed linearum coincidentia.

Vide figuram paginæ præcedentis.

Sed, quoniam sententia isthæc Peletarii ægriùs antehac assensum invenit: Præter ea quæ dicta sunt, quæ quidem veram & genuinam rei causam videntur continere, adeóq; a priori demonstrare; Alias adhuc aliquot demonstrationes adjungendas duxi, partim a Peletario allatas, partim a me additas. Non quòd velim singula quæ inter Peletarium & Clavium agitantur examinare; quæ scilicet vel minùs caute ab hoc aut illo efferuntur, aut ad hominem dicta sunt, potiùs quam ad rem; sed ea solùm quæ argumentorum vires exhibent, ipsámq; rem controversam propius attingunt.

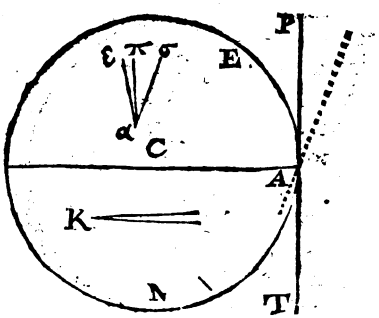
CAP.

Digitized by Google

CAP. V.

Argumentum secundum; Ubi, de Angulorum ὁμογενείᾳ.

PEletarii argumentum primum, quo assensum cogere conatur, & cui præcipuas vires attribuit, est ἀπαγωγὴ, seu deductio ad absurdum, sive impossibile: nititur autem propositioni primæ decimi Euclidis, quæ hæc est, *Propositis duabus magnitudinibus inæqualibus, si a majori auferatur majus quam dimidium, & item a residuo majus quam dimidium, id q; continuè fiat; relinquetur tandem magnitudo aliqua minor magnitudine minore proposita.* Unde concludit Peletarius, quòd, si angulus contactus E A P, & rectilineus K, sint propositæ quantitates inæquales, sitq; angulus



rectilineus angulo contactûs major; si ab angulo rectilineo auferatur (vel semissis, vel) plusquam semissis, & deinde residui (semissis, aut) plusquam semissis, & sic deinceps; tandem relinquetur angulus rectilineus (nempe, si sectiones rectis lineis fiebant) angulo contactûs minor: At hoc fieri non posse demonstravit Euclides 16 e 3. Non sunt igitur angulus contactûs & rectilineus duæ inæquales quantitates (ut supponebatur;) sed eorum alter non-quantitas. Angulus igitur contactûs (nam de rectilineo non est quæstio) est non-quantus, sive non-angulus, quod erat ostendendum.

Atq; eodem modo arguere licebit ex 2ª primi Archimedis,

Digitized by Google

de Sphærâ & Cylindro: quæ propositio hæc est, *Datis duabus magnitudinibus inæqualibus, possibile est duas rectas describere, quarum minor ad majorem, rationem habebit minorem, quàm habet magnitudo minor ad majorem.* Si autem possibiles sint duæ rectæ lineæ, quarum hæc ad illam minorem rationem habebit, quam habet angulus contactûs, ad rectilineum (quod omnino dicendum est, per hanc Propositionem, si angulus contactus sit vere quantitas,) certe angulus contactûs non erit omni angulo rectilineo possibili minor: quum possit angulus rectilineus in infinitum dividi, per 9 e 1, non minus quàm recta linea.

Sed & Euclides, & Archimedes, passim hoc assumunt in demonstrationibus quasi per se notum, & postulandum; *quantitatem minorem toties multiplicari posse ut quamvis assignatam majorem superet.* Ergo, & angulus contactûs (si saltem sit omnino quantus) toties multiplicari potest, ut angulum quemvis rectilineum superet; non esset igitur (quod tamen esse demonstravit Euclides) omni possibili rectilineo minor.

Quid autem Clavius ad hæc? Nempe ait, Propositionem illam Euclidis intelligi de illis quantitatibus quæ sunt ejusdem generis, & quarum utravis multiplicata alteram excedere possit; quod de angulo contactus & rectilineo dici non potest, cùm angulus contactûs quamtumvis multiplicatus angulum rectilineum superare nequeat. (Atq; idem, credo, dicturus esset de memorata propositione Archimedis, si illam adduxisset Peletarius.) Magnitudines autem illas, quarum altera multiplicata reliquam superare nequit, non censendas esse, ait, ejusdem generis, quod ad proportionem attinet, licet sub eodem genere quantitatis, hoc est, sub longitudine, aut latitudine, aut profunditate, aut numero, collocentur.

Quibus ego hæc habeo quæ regeram.

1° Fatendum est propositiones illas, & quidem omnes alias ubi de proportionibus agitur, intelligendas esse de quantitatibus tantum homogeneis. Neq; enim Peletarius, nec, credo, quisquam alius, Quantitates Heterogeneas sic comparari posse diceret. Quis enim unquam affirmavit, Anguli ad Superficiem, Numeri ad Magnitudinem, Lineæ ad Solidum, ullam rationem esse? Aut quidem Heterogeneorum unum altero vel majus esse, vel minus, vel ipsi æquale? Vel etiam addi aut subduci posse? Nam quantitates Heterogeneæ, non modò sunt ἀσύμμετροι, (quod

&

Digitized by Google

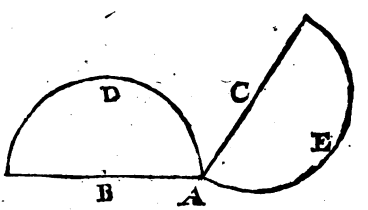
& inter Homogeneas etiam non rarò accidit, ut ex Decimo Euclidis manifestum est,) sed & plane ἀσύμβλητοι. Atq; illud satis innuit Euclides in *Rationis* definitione, 3 d 5, quum ait esse, *duarum magnitudinum* (ὁμογενῶν) *ejusdem generis, mutuam quandam secundum quantitatem habitudinem.*

Verùm 2°. Dico ego omnes omnino angulos planos, sive rectilinei sint, sive curvilinei, sive mixti, Homogeneos esse, & quidem quamcunq; rationem ad alios assignandos subire posse; sive æqualitatis, sive inæqualitatis, rationalis, sive irrationalis. Quid enim impedit quo minùs ita se res habeat? aut quidnam illud est unde hanc ὑπεροχήν oriri supponamus?

De Angulis Rectilineis inter se, res est in confesso: nemo enim unquam dubitavit angulos rectilineos in quàvis possibili ratione fieri posse? quamvis revera nondum methodus constet, (neq; forsan unquam constabit,) qua possimus datum angulum rectilineum in data ratione (Geometrici) secare.

De Angulis item curvilineis, rem etiam non negandam existimo: possunt enim curvilinei ad invicem vel æquales assignari, vel inæquales. Atq; idem etiam, de angulis mixtis inter se, dici poterit.

Imò verò & angulo rectilineo cuilibet possibili, possibile est & curvilineum æqualem assignare: prout ipse Clavius, ex Proclo, demonstrat, ad 5 d 5. Est enim, exempli gratia, angulus curvilineus D A E, æqualis rectilineo B A C: Et pari modo, cuivis rectilineo assignabili, assignabilis est æqualis curvilineus: ideóq; & curvilinei, non modò inter se, sed & cum rectilineis, quamlibet assignabilem rationem subire possunt, quam ipsi subire possunt rectilinei inter se: Non igitur curvitas crurum ὑπεροχήν angulorum inducet, quin possint adhuc ad rectilineos rationem sive proportionem habere.

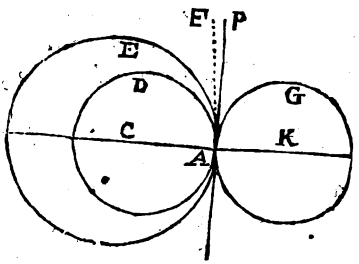


At fortassis dicetur, Quamvis verum illud sit de rectilineis & curvilineis quibusdam inter se, non tamen ita erit in angulis mixtis.

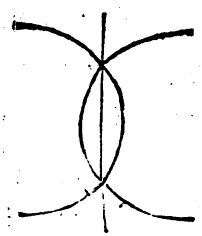
Imo

Digitized by Google

Imò verò in angulis miſtis illud etiam verum eſt, non modò ſi ad curvilineos, verùm etiam ſi ad rectilineos comparentur. Nam, duobus ſe mutuò contingentibus circulis, ſaltem æqualibus, G A, D A, quorum etiam utrumq; contingit, in eodem puncto A, recta P A; ne quidem ipſe Clavius negabit angulum contactûs miſtilineum G A P, (ſi modo ſit angulus) ſemiſſem eſſe anguli contactus curvilinei G A D, ſemiſſis autem ad ſuum integrum veram eſſe rationem, nemo dubitabit. Angulus igitur curvilineus & miſtilineus (ſi ſaltem anguli contactus ſint verè anguli, ut vult Clavius,) ſunt homogenei, & veræ rationis ad invicem capaces.



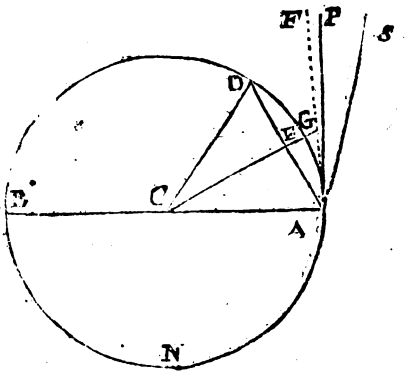
Quod ſi angulus, qui dicitur, contactûs revera non ſit angulus, (prout ego, cum Peletario, exiſtimo;) attamen curvilinei cum miſtis nihilominus homogenei erunt. Nam ſi duo circuli, ſaltem æquales, ſe mutuò ſecent, &, per duo ſectionum puncta, recta ducatur; manifeſtum eſt, fieri curvilineos angulos miſtilineorum duplos, tam qui curvis convexis, quam qui curvis concavis, continentur. Poteſt igitur curvilineus, ad angulum miſtum veram rationem habere; adeoq; ipſi, fatente Clavio, eſt homogeneus.



Sed & poteſt angulus miſtus etiam ad rectilineum rationem habere; quod nec Clavium fuiſſe negaturum exiſtimo. Nam recta (ſi non quæ tangit, ſaltem) quæ ſecat peripheriam, angulum cum peripheriâ (tam intra quam extra) miſtum facit, qui erit angulo rectilineo, ſaltem aliquo, major; qui quidem multiplicatus poterit & quemvis aſſignatum angulum rectilineum ſuperare, (& contra, rectilineus hunc) ideóq;, fatente ipſo Clavio, λόγον ἔχειν, dicendus erit, per 5 d 5. Exempli gratiâ. Si peripheriam E A, recta S A ſecet, P A tangat, in puncto A; erit angulus miſtus E A S vel æqualis vel ſaltem major angulo rectilineo P A S; & propterea poterit

Digitized by Google

poterit multiplicatus quemvis angulum rectilineum superare, non minus quam ipse PAS, (& rectilineus illum,) ideóq; ad quemvis angulum rectilineum rationem habebit, per 5 d 5. Erit igitur angulus mistus EAS, rectilineo homogeneus: cur igitur & mistus EAP (si quidem sit angulus) non esset homogeneus, non video: crura siquidem vel eadem habent, vel quàm



simillima, nec aliter differunt quam quod magis aut minus divaricentur. Sed & eodem modo facile ostendi potest, omnes alios angulos, sive rectilineos sive curvilineos sive mistos, (si angulum contactus excipias) & quidem sive peripheriis sive aliis curvis formentur, tales esse quales ne quidem Clavius negaret cuivis angulo rectilineo & homogeneos esse & quidem λόγον ἔχοντας; soli siquidem anguli contactuum, secundum illum, sunt quidem anguli plani, nec tamen aliis quibusvis sive rectilineis sive curvilineis sive mistis homogenei: Unde autem illa, quam somniet, ἑτερογένεια oriatur, neq; potest ille ullatenus ostendere, neq; ego vel somniare. Non nego quidem illum hac in re aliquid conari, sed conatu planè irrito: videamus tamen quid illud est.

CAP. VI.

Exceptionibus Clavii respondetur.

EGO, inquit Clavius, *angulos illos*, (contingentiæ scilicet & rectilineum) *Ejusdem esse generis negavi, hac solum de causâ, quod*

angulus contactus quantumvis multiplicatus angulum acutum rectilineum superare nequeat.

At inquam ego, Idem omnino sequi, si angulus contactus statuatur (non quidem angulus heterogeneus, sed) non-angulus. Nam, quod nihil anguli habet, quantumvis multiplicetur, nunquam constituet angulum: eâdem nempe ratione quâ *Cipher*, quantumvis multiplicata, nunquam constituet *Numerum*. Assumit autem Clavius, illud nempe quod erat probandum, Angulum contactûs esse verè angulum: atq; hoc quasi concesso, conatur ostendere, Heterogeneum esse, saltem quod ad rationem attinet; eo nempe quod angulus homogeneus non sit per 5 d 5. Ego quidem definitionem Euclidis (cui ipsius argumentum innititur) facile concedo, & pro veritissimâ assertione agnosco; nempe *Rationem habere inter se magnitudines dicuntur, quæ possunt multiplicatæ se mutuo superare*; & contra, *Magnitudines, quæ non possunt, quantumvis multiplicatæ, se mutuo superare, non dicendæ sunt rationem inter se habere*; sed pro heterogeneis habendæ sunt. Non igitur affirmo angulum contactûs & rectilineum esse quantitates homogeneas, sed nec heterogeneas, sed eorum alterum quantitatem esse, alterum non esse. Atq; illud antea dixerat Peletarius, nec tamen quidquam solidæ rationis affert Clavius, quâ contrarium ostendat.

Quod enim dicit, ex definitione anguli plani, *Ut angulus planus efficiatur, sufficere duas lineas in plano ad invicem inclinari*, non autem requiri, *ut se mutuo secent*. Ego illud fateor; sed nego peripheriam & rectam tangentem *ad invicem inclinari*, saltem quoad punctum concursus; coincidunt enim, non inclinantur. Agnosco etiam (quod alibi ait) *Angulum consistere in unico puncto, & linearum inclinatione quæ non indirectum jacent*; verum lineas has *inclinari* non agnosco. Sed & cum Peletario affirmo, eas solùm lineas *inclinari* (in puncto concursûs) quæ; si producantur, se mutuò secabunt: neq; contrarium Clavius ostendit usquam.

At, inquit, *Recta finita & infinita ideo non censentur ejusdem generis, cum altera ad alteram proportionem non habeat, quamvis sub eodem genere magnitudinis, nempe lineâ rectâ, comprehendantur.*

Respondeo. Propositio Archimedis procedit de duabus magnitudinibus inæqualibus *datis*, (Δύο μεγεθῶν ἀνίσων δοθέντων,) Et similiter Euclidis 1 e 10 de duabus magnitudinibus inæqualibus *propositis*, (Δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων.) At verò quia

dedit

Digitized by Google

dedit unquam, vel proposuit, lineam infinitam? Quod enim (magnitudine) datur, eò ipso quòd datur, est finitum.

Fateor quidem dici solere, *Finiti ad infinitum nullam esse proportionem.* Sed, inquam, per *infinitum*, tunc intelligi, vel *indeterminatum* aut *indefinitum*; vel quid *Positivè infinitum*, quod nullos admittit terminos.

Priori sensu Euclides in 12 e 1, & passim alibi, vocem illam sumit, dum jubet rectam infinitam ducere, vel datam rectam in infinitum producere. Non enim illud vult ut lineam quis duceret, quæ, cùm ducta fuerit, sit infinita; esset enim hoc impossibile, & postulato secundo contrarium, cujus tamen vi ejusdem constructio juberi solet: sed ut linea quantumlibet longa ducatur. Et hoc sensu, verum quidem est, quantitatis indeterminatæ ad determinatam nullam esse determinatam proportionem, sed vagam saltem, qualis est ipsa quantitas. At linea recta dum *indeterminata* est, *data* non est; hoc est, magnitudine data non est, licet positione dari possit; Linea igitur indeterminata, *magnitudo data*, non est; Et ad præsens negotium non spectat: linea verò data, est determinatæ magnitudinis, &, ad aliam quamvis datam, determinatam habet rationem.

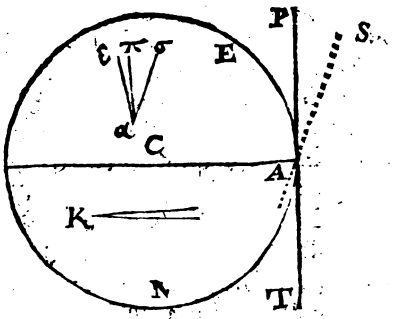
Posteriori sensu, prout *Infinitum* significat id quod *positivè infinitum* sit, adeóq; omnes terminos possibiles actu excedat; ego planè nego, ejusmodi *rectam infinitam* omnino dari posse: adeóq; nihil mirum videbitur, quantitatis impossibilis impossibilem esse rationem, seu proportionem; quod autem impossibile est, illud non est; adeóq; cum infiniti ad finitum ratio sit impossibilis, ejusmodi ratio nulla est, sive non est. At interim, magnitudinum inæqualium *datarum*, ratio etiam datur, (per 1. Dat. Euclid.) & propterea, si angulus contactûs & rectilineus sint quantitates inæquales verè datæ, dabitur etiam eorum ratio; & quidem, si anguli sint, erunt homogenei.

Deniq; (ut nihil præteream, a Clavio allatam, quod alicujus momenti, hac in re, videri possit) hujusmodi forsan ratiocinium ex ipsius dictis (pag. 262.) colligi poterit. Si duorum angulorum mutuò applicatorum duo crura homologa invicem congruant, reliqua verò duo crura non congruant, illi anguli non sunt æquales. At anguli contactûs crus alterum, nempe recta contingens, anguli rectilinei cruri superimpositum, congruere potest, at interim crus reliquum reliquo cruri non con-

Digitized by Google

gruet (quia curvum recto non congruet;) Ergo nulli angulo rectilineo æqualis est angulus contactûs; adeóq; neo ullam habebit ad angulos rectilîneos rationem.

Respondeo 1°. Eodem argumento sequeretur etiam angulum EAS (peripheriâ & rectâ secante comprehensum) non minus quam EAP (angulum contactus) non modo nulli an-



gulo rectilineo possibili æqualem esse (quia nempe si crus alterum AS, anguli rectilinei cruri alterutri superponatur & congruat, reliquum tamen AE reliquo congruere non potest) quod fortè concederet Clavius: verùm propterea nullam esse rationem hujus ad illum, nempe anguli EAS ad quemvis possibilem rectilineum; quod tamen ne quidem Clavius diceret; non enim negare posset angulum EAS, saltem multiplicatum, posse angulum rectilineum, saltem aliquem, superare; præsertim cum citra dubium sit, ipsum EAS angulum mistum, rectilineo PAS vel majorem esse vel saltem æqualem. Argumentum igitur allatum, ne quidem Clavio judice, quicquam præstabit.

Ut autem non solum retorqueam argumentum, sed & nodum solvam; Respondeo 2°. Verum quidem esse, quòd, si duorum angulorum æqualium duo crura homologa congruant, congruent etiam & reliqua duo crura, tamdiu scilicet quam eorum utrumq; eandem retinet inclinationem, quæ fuit in ipso puncto concursus (vel etiam ubi utrumq; simul æquè ab illâ inclinatione deflectat:) at vero si alterum suam quam in puncto concursûs habuit inclinationem retineat, reliqua verò suam mutet, illa non diutjùs congruent. At vero hoc in angulis mi-

stis

Digitized by Google

tis (sive angulis contactûs sive aliis) ad rectilineas comparatis perpetuo accidit; propterea quod curva inclinationem suam in singulis punctis mutet, recta vero eandem semper inclinationem retineat; adeóq; quamvis earum in ipso contactûs puncto eadem fuerit inclinatio, postquam tamen ab eo recessum est fiunt earum inclinationes ad invicem alia atq; alia. Non igitur sequitur, angulum mistum angulo rectilineo æqualem esse non posse, quamvis non utraq; eorum crura, extra punctum contactûs, congruant. Atq; ita ea quæ Clavius adduxit, ut probet angulum contactûs & rectilineum heterogeneos esse, & non ejusdem generis ut inter eos aliquam rationem esse dicatur, satis refelli judico; adeóq; nihil superesse quò minus argumentum ex 1 & 10 desumptum legitimè concludat.

CAP. VII.

Angulorum Planorum ὁμογένεια confirmatur.

VErùm nequis existimet, id satis non esse, ea quæ in contrarium allata sunt refelliſſe; nisi & affirmative concludam, Angulum contactûs, si quidem angulus sit, reliquis angulis planis, & nominatim rectilineis, homogeneum esse: Sic argumentor.

1°. Quæ mutuò possunt vel addi vel auferri; ea non sunt heterogenea: (Quis enim unquam Lineam Solido, aut Superficiem Numero, vel addi posse, vel auferri dixit? Possunt quidem *ἀσύμμετρα*, sive incommensurabilia, invicem & addi & auferri, ut in Binomiis & Apotomis notum est, & passim in X Euclidis: Heterogenea vero non possunt, sed plane sunt *ἀσύμβλητα*.) At angulus contactûs, si quidem sit angulus, & recto auferri potest, ut maneat angulus semicirculi internus; & recto adjungi potest, ut fiat angulus semicirculi externus: (atq; idem ostendi potest si ad alios quosvis angulos planos comparetur:) Non est igitur Heterogeneus.

Hujus autem argumenti vires, vel quod Peletarius monuerit, vel quòd ipse præsenserit, conatur Clavius quantum potest, frustra tamen, declinare. Ideóq; negat se Angulum contactûs asserere rectilineo simpliciter Heterogeneum esse, sed *quodammodo diversi generis*, (eo nempe quòd angulum rectilineum quantum-

Digitized by Google

vis multiplicatus superare nequeat:) &, licet quoad alia homogeneus sit, *non censeri* tamen *ejusdem generis quod ad proportionem attinet* At vero quo pacto ea, quæ quoad alia sunt homogenea, sint quoad rationem heterogenea, ego plane non video. Euclides certe 3 d 5, ubi Rationem definit, Homogenea, non dubitat esse, quoad rationem homogenea: Est enim, inquit, λόγος ratio, δύο μεγεθῶν ὁμογενῶν ἡ κατὰ πηλικότητα πρὸς ἄλληλα ποια σχέσις, *duarum magnitudinum, ejusdem generis, mutua quædam quoad quantitatem habitudo.* Siquæ igitur duæ quantitates homogeneæ sint (prout Clavius non negat hos esse angulos) earum mutua ad invicem quoad quantitatem habitudo *Ratio* dicitur.

Quod autem attinet ad ejusmodi quantitates homogeneas, sive ejusdem generis, quarum altera quantumvis multiplicata reliquam nunquam superabit: Euclides nullas agnoscit tales esse; sed ἐντῶς asserit, 5 d 5, Quantitates omnes, quarum una ad alteram *Rationem habere* dicendæ sunt, (hoc est, per 3 d 5, omnes quantitates *homogeneas*,) ita esse constitutas, ut *multiplicatæ se mutuo superare possint*, Et propterea, in 1 e 10, illud postulatum assumit, quasi per se notum, quódq; demonstratione non indigeat, *Quantitatem quamlibet minorem toties multiplicari posse ut tandem majorem quamlibet assignatam superet.* Nam in ipsa constructione seu κατασκευῇ ad illam demonstrationem, statim jubet *Magnitudinem minorem assignatam toties multiplicare, donec majorem assignatam superet*; quasi quidem illud fieri posse nemo dubitaverit. Et similiter Archimedes passim, At neq; Euclides neq; Archimedes, illud fieri posse, in aliis sive angulis sive quantitatibus, magis quam in ipso angulo contactûs, usquam ostendit. Vel igitur universaliter verum est, & postulandum, Quamlibet quantitatem minorem toties posse multiplicari ut quamlibet majorem assignatam superet; vel saltem Euclides aut Archimedes illud specialiter de quibusdam quantitatibus demonstrasset, quibus illud convenit, & non tanquam universaliter verum & per se cognitum postulassent. Poterat etiam Clavius meminisse, se Euclidem reprehendisse, quod axiomate 11 (vel, secundum aliòs, postulato 5) assumpserit, *duas rectas ad invicem in eodem plano inclinatas, si producantur, tandem concurrere*; quoniam hoc, quamvis verum sit, non tamen gratis assumendum erat sed demonstrandum, ideo nempe quia in lineis curvis hoc non constat (de quibus nec Euclides illud asserit.) Ideóq; Clavius

ad

Digitized by Google

ad 28 e 1 illud demonstrat; iis tamen ibidem assumptis quæ & nihilo minus dubia sunt, & quæ eodem ipso nomine sunt reprehendenda. Quam justa autem ista sit Euclidis reprehensio, non hic vacat inquirere: at saltem eadem ratione, ne dicam longe majori, reprehendendus esset tam ille quam Archimedes, si modo hoc postulatum, quod indiscriminatim assumitur, non esset universaliter verum: atq; Clavius, Euclidis reprehensor, illud (si posset) demonstrasset de aliis omnibus quantitatibus verum esse, quamvis de angulis contactuum verum non sit. Quodsi neq; Clavius, neq; quispiam alius poterit demonstrare, aliis quantitatibus magis illud convenire quam hujusmodi angulis (si saltem sint anguli & vere quanti;) concedendum erit illud universaliter verum esse, prout Euclides & Archimedes videntur sensisse.

2° Sic ulterius arguo, Duæ quantitates, quarum altera major altera minor est, sunt inter se *Homogeneæ*, & quidem (si illud interponere necesse sit) *quoad Rationem* homogeneæ: Sed angulus contactûs, si quidē sit angulus, & angulus quivis rectilineus, ejusmodi sunt quantitates. Ergo Propositione minorem demonstrat Euclides 16 e 3. Major propositio pariter videtur indubitata: Nam quæ rationem habent ad invicem sunt homogenea, per 3 d 5. At quæ se habent ad invicem ut majus & minus, ea saltem ad invicem Rationem habent. Quî enim fieri potest ut quantitas quantitate minor sit, in nulla tamen Ratione minor? Imò verò, Quantitatem quantitate minorem esse, nec tamen ad illam Rationem habere, est contradictio in adjecto; nam ipsum *minus esse est rationem habere*. Atq; hoc quidem ne ipse Clavius negare debet; nam & ille Proportionem sive Rationem (quæ apud illum tantundem significant, ideóq; & hic passim promiscue usurpantur) dividit in proportionem Æqualitatis & proportionem Inæqualitatis, & hanc iterum subdividit in proportionem Majoris Inæqualitatis, & Minoris Inæqualitatis, sive Majoritatis & Minoritatis: Adeò ut quicquid sit alteri vel Æquale vel Inæquale, quicquid altero Majus est vel Minus, illud saltem Rationem habet. Si igitur angulus contactûs sit revera Angulus, sitq; angulo rectilineo Minor, habebit ad illum rationem Minoritatis, sive Minoris Inæqualitatis; Quæ autem rationem habent, ea possunt multiplicata se mutuo superare: At angulus contactûs, quantumvis multiplicatus, rectilineum

non

non ſuperabit; ideóq; nec rationem ad illum habet; quare nec eſt quantitas minor, nec quidem omnino quantitas.

Huic argumento nihil omnino eſt quod Clavium oppoſuiſſe reperio; Fluſſatem tamen legerat ubi hoc innuitur (laudat enim) adeóq; hanc difficultatem non tam ignoravit quam diſſimulavit; niſi potius dici poterit, non illi incubuiſſe illas difficultates ſolviſſe, quas, quamvis ipſe noverit, Peletarius tamen non objecerit.

At Fluſſas Candalla, ad 16 e 3, Fatetur quidem rationem inæqualitatis concedendam eſſe inter angulum contactûs & rectilineum: verùm laxiorem eſſe hanc proportionem, ait, quæ intercedere poteſt inter illa quæ ſunt diverſi generis; at verò particularem certámq; rationem inter ea tantum intercedere quæ poſſunt multiplicata ſe mutuo ſuperare.

At ego, quorſum ſe torqueant Mathematici, ut ſubterfugia tam tenuia tanto negotio exquirant, certe non video; cum poſſent hæc omnia quæ urgentur incommoda facillimo negotio devitare, modo fateri vellent, prout res eſt, Angulum contactûs eſſe revera non-angulum.

Clavius autem, quamvis Fluſſatem legerat, adeóq; ipſius reſponſum huic difficultati viderat, mallet tamen (ut videtur) totam hanc difficultatem diſſimulare, quam tam leve reſponſum obtendere, dum tamen quicquam fortaſſe ſolidius quod opponat non habuit.

Fluſſati vero ſic reſpondeo. Nobis quidem ſufficere modo concedatur ratio inæqualitatis: Non enim poſtulat vel Euclidis vel Archimedis propoſitio, cui innititur argumentum, ut propoſitæ magnitudines ſint *in certâ aliquâ ratione* inæquales, (puta in ratione multiplici, ſuperparticulari, &c.) ſed ſolummodo, ut habeant *rationem inæqualitatis: Datis* (inquiunt) *duabus magnitudinibus inæqualibus, &c.*

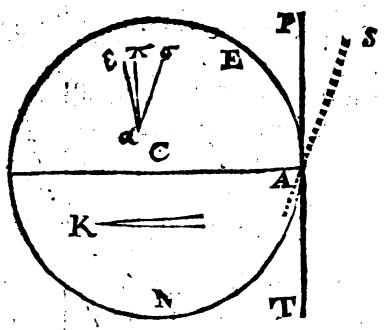
Hæc autem cùm ſcripſeram, Fluſſatem paulo accuratius intuitus, comparatis item quæ ipſe alibi habet ad 3 d 5 & 1 e 10; video illum, per *rationem incertam, confuſam, indeterminatam*, nihil aliud velle, quàm ἄῤῥητον, ἄλογον, *ſurdam* vel *irrationalem*: adeóq; concedit ille id quod jam contendimus, nempe *angulum contactûs ad angulum rectilineum rationem habere propriè dictam* (modo ſcilicet quantitatem eſſe conſtet) illam ſcilicet quam vult Euclides 3 d 5 & 5 d 5. (adeoq; illum hac in re adverſarium non habeo,)

Digitized by Google

beo;) *irrationalem* tamen esse hanc rationem existimat, nec veris numeris explicabilem. Sed & affirmat, angulum contactûs verum anguli quantitatem habere, eamq; quantitatem talem esse quæ multiplicata quantitatem anguli rectilinei superare poterit; non quidem manente angulo contactûs, sed mutato angulo contactûs in rectilineum; eodem scilicet modo quo angulus rectilineus acutus ita multiplicari potest, ut (mutatâ tamen specie anguli) rectum superare possit: Et, quo sensu acutus rectilineus est minor omni recto vel obtuso possibili, eodem (nec alio) & angulum contactûs esse minorem omni acuto possibili, posse tamen (mutatâ anguli specie) multiplicatum acuto rectilineo majorem fieri, sicut & acutus rectilineus (mutatâ specie anguli) multiplicatus evadit recto major, aut etiam obtuso. At hæc quomodo cum iis, quæ ab Euclide demonstrantur ad 16 & 3, constare poterunt, ipse viderit.

Verùm si tanti illud esse putet vel Flussas, vel quispiam alius, ut non modo ostendantur hæ magnitudines (si saltem utraq; sit verè magnitudo) *inæquales*, sed & *in certa aliqua ratione inæquales*, saltem vel rationali vel irrationali; Ego hoc facile probaturus sum sequenti argumento.

3° Igitur, dimittamus aliquantisper angulum contactûs EAP, & tractemus angulum semicirculi: Est, inquâ, angulus semicirculi EAC non modò alicui angulo rectilineo *inæqualis*, sed & in *certa aliqua ratione* inæqualis; talem saltem rationem habet, qualem vult Euclides in 5 d 5: Potest enim, saltem multiplicatus



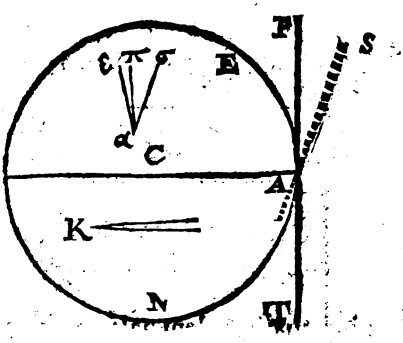
E angulum

angulum rectum rectilineum superare. Quod neq; Clavius neq; quisquam alius negabit. Adeóq; angulus semicirculi, fatente Clavio, ad angulum rectum rectilineum, rationem certam & determinatam habet, quamvis illa fortasse cognita non esset.

At, per 5 Datorum Euclidis, *Si magnitudo ad sui aliquam partem habeat rationem datam, etiam ad reliquam habebit rationem datam*: adeoq; si angulus rectus rectilineus P A C, ad sui partem, nempe angulum semicirculi E A C (si saltem angulus semicirculi sit ipsius pars, & non potius ipse totus) rationem datam habeat, habebit & rationem datam ad partem reliquam E A P angulum contactûs: Et quidem, pari de causâ, si ad illum rationem *debilem* habeat, quippe certam & determinatam, habebit & ad hunc rationem *debilem*, certam puta & determinatam. Quod ostendendum erat.

Deniq;, quoniam ideo præsertim Clavius angulum contactûs rectilineis homogeneum esse non putat, neq; ad illos rationem ullam habere, quòd nulli rectilineo possibili æqualis esse possit; (quanquam illud leve sit argumentum; nam, verbi gratia, $\sqrt{2}$ nulli numero æqualis est, aut esse potest, cum sit latus surdum, non tamen est planè heterogeneum quid, neq; nullam omnino rationem habet quamvis non, ut loquuntur, rationalem:) conabor utcunq; & illud probare; nempe Angulum contactûs, si verè sit angulus, esse rectilineo alicui possibili æqualem, sequenti argumento.

4° Ostensum est supra, angulum curvilineum E A S, recti-



linco

lineo cuivis homogeneum esse, atq; ad illum rationem proprie dictam habere, per 5 d 5, quia potest, saltem multiplicatus, rectilineum superare. Si verò sit rectilineis homogeneus, adeóq; v. g. ad rectum rectilineum veram rationem habeat, erit saltem alicui rectilineo æqualis: erit enim vel hic aliquanta pars recti, vel rectus hujus, vel deniq; erunt æquales: angulos autem rectilineos ad invicem in quâcunq; ratione constitutos in rerum naturâ possibiles esse, vix quisquam Mathematicus negabit; cum illud omni quantitati continuæ, propter ipsius divisibilitatem in infinitum, competere receptum sit; atq; hoc, si non Clavius, saltem Flussas expresse agnoscit, in iis quæ decimo Euclidis præmittit. Esto igitur angulo misto EAS, æqualis rectilineus *ταυ*: est autem hic vel æqualis ipsi PAS, vel saltem ipso major, (minor enim esse non potest, quoniam PA, cum tangens sit, extra peripheriam cadat, per 16 e 3.) si æqualis sit, conceditur quod erat probandum, nempe angulum *ταυ*, hoc est EAS, æqualem esse ipsi PAS, ideóq; angulum EAP nihil esse: Si vero *ταυ* sit ipso PAS major, auferatur inde *ταυ* ipsi PAS æqualis, per 23 e 1, & manebit *ταυ* ipsi EAP æqualis, per 3 a 1. hoc est, angulus rectilineus angulo contactûs æqualis. At dicetur, Euclidem demonstrâsse hoc esse impossibile, ut angulus contactûs sit rectilineo æqualis. Recte quidem; atq; illud ego agnosco. Sed inde sic disputo; si angulus contactûs sit verè angulus, erit alicui rectilineo æqualis, per ea quæ jam demonstravimus: At nulli rectilineo est æqualis, per ea quæ demonstrat Euclides 16 e 3: Ergo non est vere angulus. *ὅπερ ἦν δεῖξαι.*

Atq; hactenus principale Peletarii argumentum, ex 1 e 1 o desumptum, ab iis quæ in contrarium afferuntur vindicavi; adeo ut ipsius sequela inconcussa maneat; atq; simul angulos planos tam curvilineos quam mistos rectilineis homogeneos ostendi.

CAP. VIII.

Honoratissimi Equitis D. HENRICI SAVILII Testimonium hac in re.

LIbet tandem hic subjungere, quæ inter Honoratissimi Equitis, D. *Henrici Savilii* (Patroni seu Fundatoris nostri Munificen-

Digitized by Google

nificentiſſimi) ſchediaſmata alicubi; de quantitatibus Homogeneis, reperio inter ſcripta quædam illius imperfecta nondum digeſta, de menſuratione Circuli, (quæ, ut videtur, adverſus Joſephi Scaligeri Cyclometrica inchoaverat,) de Ammonio, qui circuli quadraturam, propter ἀνομοιογένειαν linearum rectæ & curvæ, impoſſibilem eſſe putavit, Patronus ille noſter (qui duos Mathematum Profeſſores publicos ſuis ſumptibus inſtituit) idemq; acutiſſimus Mathematicus, hæc habet; "Stultiſſimus Ammonius, ut eſt apud Simplicium, putavit ideo circulum quadrari non poſſe, quod non homogeneæ eſſent recta "linea & circularis. Quo quid dici potuiſſet ineptius! Quid? "non ea proprie homogenea ſunt, quæ & proprie majora ſunt "alia aliis & proprie minora? Verbi gratia; Linea & Superficies heterogenea ſunt, ſic Superficies & Corpus, & plane ἀ"σύμβλητα, neq; enim linea proprie vel major vel minor dici "poteſt ſuperficie, nec ſuperficies corpore, neq. enim inter ſe "proportionem habent aut habere poſſunt. Nam, ut ait Ma"giſter noſter, rationem habere inter ſe magnitudines dicuntur "quæ poſſunt multiplicatæ ſe invicem excedere. Sed quadra"tum circulo inſcriptum minus eſt, propriè & non κατὰ χρησι"κῶς loquendo, & circumſcriptum majus. Et, de proportione "rectæ lineæ & circumferentiæ, oſtendit Archimedes, circum"ferentiam minorem eſſe quam $3\frac{1}{7}$ diametri, majorem vero "quam $3\frac{2}{71}$. Et quidem omnis linea omni lineæ eſt ὁμογενὴς. "Nemo etiam unquam doctus dubitavit, in rerum natura eſſe "quadratum circulo dato æquale, etſi in eo inveſtigando ſi ὁμο"πλῶς ἀτοπείς, i. e. per circulum & rectam lineam, ſudarunt "omnes penè tam antiqui quam recentiores, non magno tamen ſucceſſu, etſi alii aliis fuerint feliciores.

Ex his liquet, juxta Honoratiſſimi *Savilii* ſententiam, omnino abſurdum eſſe, ea pro Heterogeneis haberi, quæ proprie majora ſunt alia aliis, & proprie minora. Non tamen diſſimulabo, illum de anguló contactûs & ſemicirculi aliquantulum hæſitâſſe; (& quid tandem concluſurus fuiſſet, ſi, re mature penſitatâ, inceptam illam diſquiſitionem perfeciſſet, non auſim aſſerere;) nam & hæc ad marginem adſcripſerat, "Quamvis de "angulis κερατοειδῆς & ἡμικυκλίῳ poſſet eſſe quæſtio, qui mihi "videntur proprie λόγον ἔχειν πρὸς ἄλληλα per 3 d 5. nam "proprie alter minor eſt omni acuto rectilineo, & alter major ne-

Digitized by Google

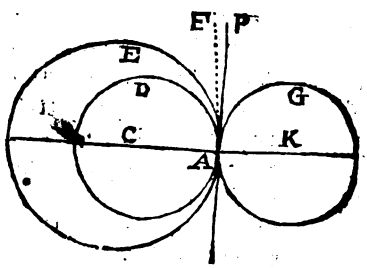
"neq; tamen potest κεφαλαιῶδης, utcunq; multiplicatus, vel mi-
"nimum excedere rectilineum, quia minimus rectilineus potest
"infinite dividi, Sed & statim subjungit. *def.* 3ª & 5ª Vi *libri irreconciliabiles.* Et quidem ego idem prorsus sentio; nempe, si statuatur angulum contactûs veram anguli quantitatem habere, definitiones illas duas simul esse veras non posse: At, si concedatur, angulum illum veram anguli quantitatem non habere, sed esse angulum tantummodò imaginarium; neq; inter se pugnabunt definitiones illæ, neq; cum 16 e 3 aut 1 e 10, aut cum aliâ quavis quam vel apud Euclidem vel Archimedem (ne plures nominem) uspiam exstare scio.

CAP. IX.

Argumentum tertium; ab æqualibus similium segmentorum angulis desumptum.

SEquitur aliud Peletarii argumentum examinandum. Illud verò huic Lemmati innititur, nempe, *Angulos similium segmentorum, saltem semicirculorum, esse æquales.* Cujus Lemmatis veritatem mox examinabimus. Interim, eo quasi concesso, hæc inde deducit Peletarius Theoremata.

1. *Contactus circulorum interior, quantitas non est.* Nam si semicirculorum anguli CAD, CAE, sint æquales, contactus interior DAE quantitas non erit, quoniam sive addatur sive auferatur quantitatem datam non immutat.



2. *Contactus lineæ rectæ cum circulo, quantitas non est.* Nam si angulus DAP sit quantitas, partes habebit, ideóq; divisibilis erit; nempe vel per rectam ut FA, quod fieri non posse ostendit Euclides 16 e 3; vel saltem per curvam, puta EA circumferentiam majoris circuli, uti ponit Clavius; sed neq; per hanc, quia DAE non est quantitas, ut jam ostensum est: Sed neq; per aliam curvam, quæ non sit periphe-

Digitized by Google

ria EA, angulum DAP non dividat, nihil est quod suadeat hoc magis fieri posse per aliam quamvis curvam.

3. *Contactus circulorum exterior, quantitas non est.* Cum enim nec EAP, nec GAP, sit quantitas, (per præced.) neq; erit EAG quantitas, eorum scilicet aggregatum.

4. *Anguli qui fiunt a diametro & peripheriâ, sive intra sive extra circulum, recti sunt, & rectis rectilineis æquales.* Nam, cum DAP non sit quantitas, erunt anguli DAC, DAK, æquales rectis rectilineis PAC, PAK.

Hæc Theoremata, ex illo Lemmate concesso, sat evidenti consecutione inferri, non negat Clavius, neq; alii credo negabunt. Tota lis est de veritate istius Lemmatis; An scilicet *Anguli similium segmentorum, saltem semicirculorum, sint æquales.* Hoc Clavius negat. Videamus igitur quid in illius defensionem adduci possit.

Quid autem ipse Peletarius adduxit in ejus adversus Clavium Apologia, nescio quidem, quoniam illam Apologiam nondum mihi contigit videre. At in ipsius commentario quodam *De contactu linearum*, (ubi eadem fere habentur quæ & in commentariis ejus in Euclidem ad 16 e 3, cum aliqua tamen accessione,) nonnulla profert, quibus istius Lemmatis veritatem adstruere conatur; quæ mox examinabimus.

Præmittit autem, *Hoc pronunciatum, pro principio Geometrico merito haberi posse.* Et quidem mihi non iniquum videtur postulatum, ut concedatur; (quanquam non ignorem illud ob præsentem controversiam, vix alia quidem causâ, in dubium vocari.) Non enim ego omnino video, quo pacto figuræ *similes* dici possunt, nisi & homologa latera habeant proportionalia, & similiter ad invicem sita: At, quonam pacto, quæ angulos inæquales faciunt, adeóq; inæquales habent ad invicem inclinationes, interim similiter sita dicantur, ego prorsus non intelligo.

In figuris rectilineis, nemo dubitat, variationem angulorum mutare speciem figuræ, (non enim aliter differt Rhombus a quadrato;) &, figurarum specie datarum angulos etiam dari, (per def. 3. Datorum Euclidis:) & quare illud in curvilineis & mistis figuris non obtineret, nulla ratio assignari potest. Adeóq; semicirculi, nisi æquales habeant angulos, figuræ similes dici non deberent.

Atqui

Attamen, e contra, si figuræ duæ ita sint constitutæ, ut in illis rectæ omnes similiter positæ, sint (respective sumptæ) proportionales, quomodocunq; ducantur; eorum latera & angulos omnes similiter posita esse, quis dubitaret? Nisi enim similis esset linearum inter se situs atq; curvatura (sed in hac anguli acutiores, & major flexuum curvatura, in illâ secùs) impossibile est, ut inscriptæ in una figura, proportionales sint similiter inscriptis in reliquâ: ut per se videtur satis manifestum viro Mathematico. At verò in semicirculis omnibus, (aut etiam segmentis aliis quibuscunq; similibus,) rectæ similiter inscriptæ sunt inter se proportionales; & quidem, proportionalium subtensarum, similes arcus sunt etiam proportionales; ut Mathematicis omnibus est notissimum: idéoq; & similes in omnibus curvaturas, & angulos æquales, videtur omnino dicendum esse.

Non ignoro quidem Euclidem aliter figuras similes rectilineas, aliter similia circulorum segmenta definivisse: Nempe *Similes figuræ rectilineæ definiuntur, quæ angulos singillatim æquales habent, & latera quæ circa æquales angulos proportionalia.* 1 d 6. *Similia* verò *circulorum segmenta* definit, non quidem ex æqualitate angulorum *quos habent*, sed *quos capiunt*: 10 d 3. Non quasi similium segmentorum anguli essent inæquales; sed quoniam, ubi postea de similitudine segmentorum agendum esset, facilius esset quantitatem anguli in segmento, quam anguli segmenti, demonstrare.

Et quidem certissimum est; Euclidem ea κειτήεια definitionibus inferere, non semper quæ rei naturam intimius spectent, sed quæ secuturis demonstrationibus meliùs subserviant, Exempli gratia. In ult. def. primi, definitur Parallelissimus rectarum, ex *non-concurrentia, quamvis infinitè utrinq; producantur*; quod quidem in lineis rectis ejusdem plani, sat infallibile est criterium parallelismi: hoc autem κειτήεον præ aliis selegit, ut eò meliùs inserviret ea definitio demonstrationi prop. 27 e 1. ubi primo de paralleliſmo agendum esset. At interim nemo dubitare poterit, quin *æqualis ubi q, ab invicem distantia* intimius spectet parallelismi naturam, licet ipsius propositio nimùs fortasse conveniret. Nam certissimum est, multa *non-concurrentia* non tamen esse parallela, ut liquet ex rectis non in eodem plano, item ex circulis qui ita duci possunt, ut neq; sint concentrici, neq; tamen se

mutuo

mutuo secent, item ex conchoide cum sua recta, & ex linea hyperbolica cum sua ἀσυμπτώτῳ, aliisq; multis. At *Parallelismus* & *Æquidistantia*, vel idem sunt, vel certe se mutuo semper comitantur. Atq; idem de aliis non paucis definitionibus dicendum esse, nemo, qui rem serio perpendit, dubitare poterit.

Atq; illud proculdubio dicendum erit de similitudine figurarum. Quamvis enim Euclides ex re sua fuisse duxerit similitudinem aliter in figuris rectilineis, aliter in circulorum segmentis, definire, quò meliùs scilicet secuturæ demonstrationes procederent: Attamen non dubitandum est eandem utrobiq; communem similitudinis notionem tam Euclidem quam alios Geometras habuisse, licet non eodem semper medio eadem facilitate posset utrobiq; pro re nata demonstrari. Figuras enim similes esse (sive rectilineæ sint, sive curvilineæ, sive inistæ; sive item pluræ, sive gibbæ, sive concavæ; sive deniq; superficiales, sive solidæ) nil aliud in universum est, quàm, earum singulas partes homologas similiter tam ad se invicem quam ad totam sitas esse: Et quicunq; hoc demonstraverit de quibusvis figuris, quocunq; demum medio id fiat, demonstrabit illas similes esse. Non enim *similitudo* de similibus rectilineis, & similibus curvilineis Æquivoce prædicatur, (secundum aliam atq; aliam significationem) sed planè univoce.

Cùm igitur angulorum æqualitas, (sine qua nec eadem erit partium ad invicem inclinatio, aut similis inter se positio,) in ipsa communi Similitudinis notione includatur; non esset iniquum postulatum ut hoc pro principio per se noto concedatur, (utpote quod ex mera terminorum explicatione immediate resultat,) *similium figurarum angulos esse æquales.*

CAP. X.

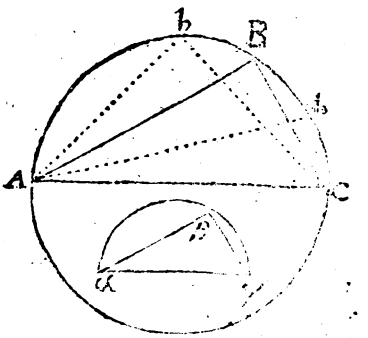
Similium segmentorum angulos æquales esse, ulterius confirmatur.

QUamvis autem hæc æqualitas angulorum in figuris similibus, satis videatur manifeste in ipsa *Similitudinis* notione contineri, ut jam dictum est; adeoq; veritatem illius assertionis, *Semicirculorum angulos æquales esse*, tanquam pronunciati sua luce noti concedendam esse: Attamen, quoniam, ob præsentem controversiam, illud in dubium vocatur; attulit Peletarius nonnulla

Digitized by Google

nonnulla quibus sententiam suam hac in re confirmet, Quæ si cui forsan, prout ab ipso proferuntur, minùs satisfaciant, conabor illa & explicare & confirmare, aliáq; prout res tulerit adjungere. Quanquam non ignorem eò difficiliorem mihi incubituram provinciam, quò minùs distet assertio probanda a principio per se concedendo, quasi suâ luce cognito. Quando enim de hujusmodi propositionibus, quæ vel principia sunt vel principiis proxima, oritur controversia; difficilius reperitur Medium quo probetur, quod sit ipsa re probanda minus dubium: cùm tamen nisi ex præconcessis & notioribus nulla procedat legitima argumentatio. Non tamen ob hanc difficultatem quicquam diffido rem illam satis Geometrice demonstrandam fore.

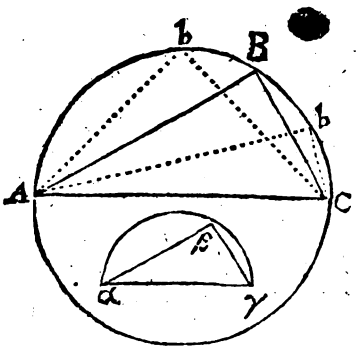
1° Argumentum desumam ex 10 d 3, quæ est similium segmentorum definitio. *Similia circuli segmenta, sunt, quæ angulos capiunt æquales; aut, in quibus anguli sunt inter se æquales.* Peletarius hinc urget, eadem analogia & *segmentorum angulos* æquales censendos esse non minùs quàm *angulos in segmentis*: Hoc est, qua ratione anguli rectilinei A B C, $\alpha\beta\gamma$, in similibus segmentis æquales sint habendi; eadem & angulos mistos BCA, $\beta\gamma\alpha$, item BAC, $\beta\alpha\gamma$, æquales etiam habendos esse. Quodego quidem verum esse non dubito. Nam nisi peripheriæ A B C, $\alpha\beta\gamma$, eandem habeant inclinationem ad suas subtensas AC, $\alpha\gamma$, non erunt ad illas similiter positæ, adeóq; neq; figuræ similes erunt. At si eadem utrobiq; inclinatio, tum & idem utrobiq; angulus per def. anguli plani.



2° Sed, quoniam Euclides in hac 10 d 3 illud non *simpliciter* de angulis segmentorum, sed de angulis in segmentis, verba facit; ego inde paulò aliter argumentum instituam, assumpta etiam 21 e 3, nempe, *In circulo, qui in eodem segmento sunt, anguli sunt inter se æquales.* Unde sequitur, angulum A B C tantundem

prorsus

prorſus eſſe ubicunq; in ea peripheria ſumatur punctum B, eundem nempe cum eo qui eſt in ſimili ſegmento $\alpha\beta\gamma$. His poſitis, ſupponamus rectam A B (quantum opus eſt prolongatam) puncto A manente, circumduci; adeóq; peripheriam ſecare in variis ſucceſſive punctis B, B, B, &c Et ab his punctis ſectionum rectas B C, B C, B C &c. duci, ad idem punctum C. Manifeſtum eſt, prout punctum B ad punctum C propiùs accedit, rectam A B longiorem fieri (modò ſegmentum propoſitum non excedat ſemicirculum) & B C breviorem, (angulo interim A B C non mutato,) uſq; dum rectâ A B ad ipſam A C accedente, idem fiat punctum B & C, hoc eſt, recta B C in unicum peripheriæ punctum degeneret, adeóq; recta B C (quanta quanta ſit) jacere ſupponitur in ipſa peripheria; adeóq; recta A B, ad ſitum A C delata eoſdem nunc angulos cum peripheria facit quos prius fecerat cum recta B C producta, nempe angulum A B C, ejuſq; reſiduum ad duos rectos; hoc eſt, angulum inferiorem (qui eſt oppoſiti ſegmenti angulus) eundem cum angulo A B C, atq; (eadem ratione) angulum ſuperiorem eundem cum ipſius complemento ad duos rectos. Sed & idem prorſus eveniret in ſimili ſegmento $\alpha\beta\gamma$, adeóq; & illic $\alpha\beta$, ad ſitum $\alpha\gamma$ delata, eoſdem angulos facit ad peripheriam quos prius fecerat ad $\gamma\beta$ (ultra punctum β productam) hoc eſt, eos quos A B ad rectam B C (productam) fecit. Adeóq; ſimilium ſegmentorum A B C, $\alpha\beta\gamma$, licet inæqualium, (quod etiam oppoſitis eorum ſegmentis accidit,) anguli ſunt æquales. Quod erat demonſtrandum.



Atq; etiam eadem opera demonſtratum eſt; ſi ſegmenta illa ſimilia ſint ſemicirculi, eorum angulos æquales eſſe rectis rectilineis; erit enim in ſemicirculo, tam angulus A B C, quam ipſius reſiduum ad duos rectos, angulus rectus.

Item, in univerſum, Angulus in ſegmento, æqualis eſt angu-

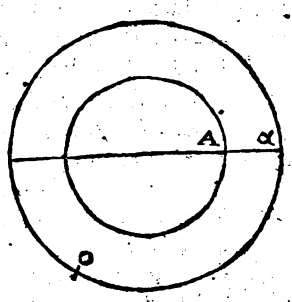
lo

lo segmenti oppositi. Seu, quod idem est, Angulus in peripheria segmento insistens, est æqualis angulo istius segmenti cui insistit.

3° Idem sic evincitur. Angulus BAC tantus est quantus semissis peripheriæ BC, per 20 e 3, (hoc est, angulus BAC est ad quatuor rectos, ut semissis peripheriæ BC, ad integri circuli peripheriam.) Ideoq; si eousq; divaricentur AB, AC, donec ipsum B (sectionis punctum) perveniet ad punctum A, (ipsaq; AB degeneret in punctum,) erit angulo BAC, oppositus integer semicirculus; ideóq; angulus BAC rectus est. Et, quoniam idem accideret in quovis semicirculo, igitur anguli semicirculorum sunt æquales, nempe recti omnes. Sed & idem ostendi potest, etiam in aliis similibus segmentis. Ergo similium segmentorum anguli sunt æquales; tanti nempe quantus istorum peripheriarum semisses.

4° Idem hoc modo probatur. Quoniam in semicirculo angulus ABC rectus est, per 31 e 3; ideoq; anguli BAC, BCA, simul, æquales recto, per 32 e 1: Si igitur recta AB moveatur usq; dum perveniat ad situm AC, angulus BAC evanescit sive nullus erit, ideóq; BCA (qui jam fit angulus semicirculi) rectus erit; nam quod aufertur angulo BAC, additur angulo BCA, ut nempe ambo æquentur uni recto. Atq; idem ostendi potest in aliis segmentis similibus; nam, per 32 e 1, erunt BAC, BCA, simul, æquales residuo anguli ABC ad duos rectos; ideóq; cum ABC, in eodem vel similibus segmentis, semper idem maneat, erit summa angulorum BCA, BAC, eadem; adeóq; cum BAC prorsus evanescit erit reliquus BCA ipsi summæ æqualis. Similium igitur segmentorum anguli sunt æquales.

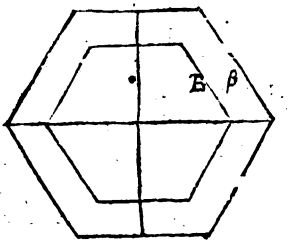
5° Idem arguo ex natura Parallelismi. Nam, ductis pluribus circulis concentricis, recta per centrum illos secans faciet angulos alternos æquales. Ideo semicirculorum anguli A, α, quamvis inæqualium æquales sunt.



Dicetur forsan, illud quidem valere in parallelis, rectis, per

29 e 1. non autem in lineis curvis utut parallelis.

Respondeo; Illud quidem speciatim ab Euclide demonstrari de parallelis rectis: At verò non minùs verum est de parallelis quibuscunq; Non enim hoc oritur ex linearum rectitudine, sed ex earum parallelismo. Hujus enim affectionis vera causa hæc est: quoniam si, verbi gratia, rectæ B, β, parallelæ sint, erunt æqualiter ubiq; ab invicem distantes: At hoc non fiet nisi quanta sit unius versus alterâ inclinatio, tanta fit & hujus ab illa reclinatio: si enim recta β ad rectam B magis inclinet, quam hæc ab illa reclinat, erit earum ad invicem appropinquatio; si contra, elongatio; non autem eadem manebit distantia. Sed & idē omnino sequeretur in curvis: Nam, si peripheria α (*fig. præced.*) magis inclinet ad peripheriam A, quam hæc ab illa reclinat, vel cōtra; necesse erit ut earum distantia ab invicem mutetur, neq; cōstans maneat; quod tamen earum parallelismus supponit. Cum igitur eadem sit utrobiq; affectionis hujus causa, eadem erit utrobiq; affectio, sive in rectis sive in curvis; nempe recta parallelas secans angulos alternos æquales faciet: Et propterea, anguli semicirculorum, utut inæqualium, æquales erunt.



6° Addo etiam; cùm illud in figuris aliis regularibus omnibus accidat, ut nempe in figuris similibus rectæ similiter positæ æquales respectivè angulos cum perimetris faciant; non credendum est illud in circulis secus esse: Eadem enim est omnino ratio in figuris trium, quatuor, quinq;, sex, aut quotviscunq; laterum, sive sint numero finita sive infinita; adeóq; & in circulo.

Verissimum quidem est, ejusmodi affectiones, quæ, in figuris regularibus, quoad mensuram decrescunt, prout laterum numerus augetur, aut contra; eas in circulo (qui est quasi polygonon infinitorum laterum) prorsus evanescere. Ut, verbi gratia, differentia rectarū quæ a centro ad latera perpendiculariter ducuntur, ab ipsis rectis quæ a centro ad angulos ducuntur; hoc est, rectarum a centro brevissimæ & longissimæ differentia: (ideoq;

Digitized by Google

(ideóq; & differentia similium figurarum circumscriptæ & inscriptæ eidem circulo:) est enim (cæteris paribus) in figuris plurium laterum minor differentia; adeoq; in circulo nulla. Item, in figuris plurium laterum, anguli in perimetro majores sunt quàm qui in perimetris laterum pauciorum, adeóq; in circulo evanescunt, cujus tota perimeter est ideo una linea, indirectum posita, licet non recta. Atq; idem in similibus aliis affectionibus ostendere liceret.

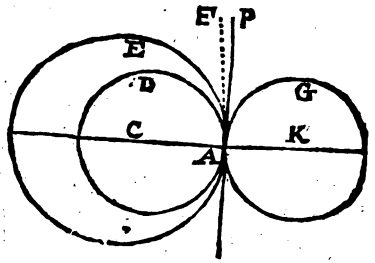
At affectiones ejusmodi quæ æqualiter se habent & invariatè in figuris omnibus regularibus, sive sint plurium sive pauciorum laterum, æqualiter etiam se habebunt in circulo, sive polygono laterum infinitorum. quæ enim non omnino dependent a laterum numero, sed a figuræ regularitate, eodem prorsus modo se ubiq; habebunt. Verbi gratia. Rectangulum, recta a centro ad perimetrum perpendiculari, & semisse perimetri, contentum, æquatur areæ figuræ regularis quotcunq; laterum; ut notum est: ideóq; & in circulo illud obtinet; quod ostendit Archimedes lib. de dimensione circuli. Item Polygona similia sunt ad invicem in duplicata ratione homologorum laterum, (vel etiam rectarum quarumvis similiter positarum,) per 20 e 6: Sed & idem de circulis verum est, per 2 e 12. Item, Pyramis est triens prismatis in basi & altitudine iisdem vel æqualibus constituti: sed & eadem est ratio Coni ad Cylindrum, per 10 e 12. Atq; idem prorsus liceret ostendere in aliis affectionibus innumeris; quæ, si omnibus figuris rectilineis regularibus quotcunq; laterum indiscriminatim conveniant, nulla consideratione habita ad laterum numerum, eædem & circulis pariter convenient. Adeóq; cùm in aliis figuris quibuscunq; similibus, utcunq; inæqualibus, rectæ similiter positæ similes cum perimetro angulos faciant; quidni & idem de circulis, aut circulorum segmentis dicendum esset? præsertim cum nihil solidæ rationis in contrarium adduci possit.

Digitized by Google

CAP. XI.

Objectioni in contrarium respondetur.

QUod enim in contrarium ostendi solet, hoc unicum est; Angulum semicirculi minoris, ut D A C, ideo minorem videri quam est angulus semicirculi majoris E A C, quia mi-



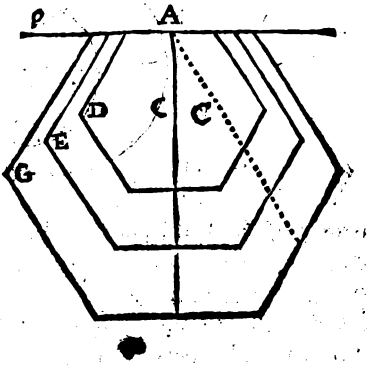
nor peripheria introrsum recedens a majori statim resilit, adeóq; partem solummodo anguli E A C videtur abscindere, quæ igitur toto minor erit: Et quidem angulus contactûs (cum lineâ rectâ tangente) E A P, eâdem de causâ minor videtur quam angulus contactus D A P, cùm hujus crura magis videantur divaricari & ab invicem resilire.

Verùm hoc, si rectè perpendatur, nihil suadet in contrarium eorum quæ a nobis proferuntur. Non enim magnitudo anguli æstimanda est ex eâ quam habent crura divaricatione extra punctum concursus, sed ex eâ quam habent in ipso concursûs puncto. Adeóq; angulus E A P minor est angulo F A P (per 16 e 3,) non quod illius crura minùs divaricentur extra punctum contactûs, (nam E P, magis distant quam F, P.) sed propter minorem inclinationem, seu potius coincidentiam, linearum E A, P A, in ipso puncto A. Inquam, *in ipso puncto* A: Nam, quamvis, ut ostendit Euclides, inter rectam P A & peripheriam E A, alia recta, ut F A, cadere non possit; hoc est, quæ minorem habeat inclinationem ad rectam P A quàm habet peripheria E A: Attamen hoc de alio quovis puncto præter ipsum A dici non potest; nullum enim aliud est punctum assignabile in curvâ E A inter quod & rectam P A non possit alia recta

Digitized by Google

recta cadere. Nam quodcunq; assignetur punctum (quod non toto saltem semicirculo distet ab A) poterit ab eo ad rectam P A recta duci, quæ & extra peripheriam cadet (verbi gratia, quæ peripheriam tangit in puncto assignato) & cum recta P A (saltem producta) concurret, quæ tamen aliâ rectâ ut F A poterit secari; quæ igitur inter assignatum peripheriæ punctum & rectam P A cadet.

Addo etiam, ejusmodi divaricationem conspici in aliis figuris regularibus se mutuo contingentibus. Ut in Hexagonis D A, E A, G A, se mutuo contingentibus in A: quorum Perimetri et se mutuo deserunt, & rectam tangentem P A, quum primum suam quam in A habebant inclinationem mutant: at non propterea anguli C A D, C A E, C A G vel inter se differunt vel ab ipso C A P. (Atq; idem omnino eveniet sive recta C A sit Hexagoni lateri pendicularis vel ad alium quemvis angulum constituta, modo similiter posita sit in singulis figuris.) Quod autem de Hexagonis ostenditur; similiter eveniret, si, pro Hexagonis, statuerentur aliæ figuræ similes quotlibetcunq; laterum; ubiq; enim, in figuris similibus, rectæ similiter positæ, æquales cum perimetro angulos faciunt. Idem igitur & de circulis se mutuo contingentibus censendum est: Nam licet peripheriæ, propterea quod suam inclinationem in singulis punctis mutent, statim post contactûs punctum se mutuo deserant; non tamen in ipso contactûs puncto variam habuisse inclinationem, vel angulos inæquales cum recta eorum per centra transeunte fecisse, aut etiam cum alia quavis recta similiter posita, censendum est. Atq; hactenus de æqualitate angulorum, similium segmentorum, diximus.



CAP.

CAP. XII.

Argumentum quartum, seu Argumentorum Classis quarta, quia quod omni positivâ quantitate minus est, est non-quantum.

ADjungam aliud Argumentum, seu potius aliam Argumentorum classem. Præmittam tamen hoc sive Axioma sive Postulatum.

Quod est omni positivâ Quantitate minus, illud est non-quantum.

Atq; hoc vel expresse assumitur, vel saltem tacitè innuitur; non modò apud Archimedem passim, in libris De Sphæra & Cylindro, De dimensione circuli, De quadratura Parabolæ, De lineis Spiralibus, De æqui ponderantibus, &c, Sed & passim apud Euclidem, ut in 2 e 12, 18 e 12, aliisq; propositionibus innumeris; & quidem in iis ferè omnibus quæ demonstrantur per deductionem ad absurdum seu impossibile.

Exsemplum esto 1ª Archim. *de dimensione circuli*; in hunc sensum: *Circulus æqualis est triangulo rectangulo, cujus laterum angulum rectum comprehendentium alterum quidem æquatur circuli semidiametro alterum vero ejusdem peripheriæ.* Hanc autem propositionem hoc modo demonstrat. Si enim triangulum illud sit vel majus vel minus circulo proposito; esto, inquit, differentia æqualis spatio (verbi gratia) A, aut alii cuivis assignato. At hoc, inquit, fieri non potest; Quoniam possibile est figuram rectilineam circulo inscribere (quæ igitur circulo minor erit) quæ tamen ab illo triangulo minus deficiat quam est spatium assignatum A quantulumcunq; sit; item figuram rectilineam circulo circumscribere (quæ igitur major erit) quæ tamen triangulum illud minus excedat quam est assignatum spatium A, quantulumcunq; demum sit; quorum utrumq; ab eo demonstratur: Non est igitur triangulum illud vel majus vel minus, quam circulus propositus, spatio quovis assignabili quantulumcunq; sit; est igitur æquale.

At verò, quàm facilè esset & hanc & innumeras alias demonstrationes eludere, si modò dicere liceat, Differentiam illam esse quidem omni assignabili quantitate minorem, non tamen nullam; Ideóq; nec quantitates propositas esse æquales.

Vel

Digitized by Google

Vel igitur concedendum est, demonstrationem illam Archimedis, aliasq; ejusmodi innumeras, apud omnes Geometras receptas, sophisticas esse & plane fallaces; quod neminem sobrium dicturum existimo: vel, quod potius asserendum erit, Differentiam illam, quæ est omni assignabili spatio minor, nullum esse: hoc est, Quod omni assignabili quantitate minus est, id nihil est, sive non-quantum.

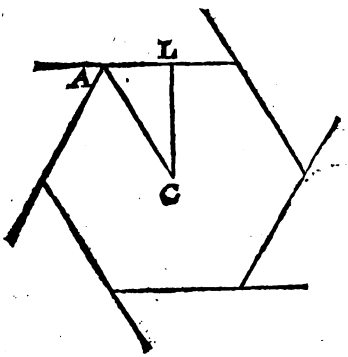
Hoc autem quod postulatur concesso, sic licebit argumentari.

1° Substituamus aliquantisper, pro circulo, Polygonum regulare rectilineum circulo inscriptum quotviscunq; laterum. Estóq; numerus laterum quantumlibet magnus, N; eritq; idem numerus angulorum Perimetri, (tot enim sunt anguli quot latera,) quorum angulorum omnium aggregatum erit æquale angulis rectis $2N-4$, (per ea quæ habet Clavius ad 32 e 1) nempe bis tot angulis rectis, demptis quatuor, quot sunt figuræ latera; Ergo angulus quilibet $\frac{2N-4}{N}$ unius recti: hunc autem bisecat recta a centro; quæ igitur angulum cum perimetro facit $\frac{N-2}{N}$ unius recti, vel $1-\frac{2}{N}$; hoc est, angulum rectum dempto $\frac{2}{N}$ recti: Differentia igitur istius ab angulo recto tanto minor est, quanto numerus laterum major; cum igitur numerus laterum augeri possit in infinitum, ita & differentia istius anguli a recto in infinitum minui, in eadem semper ratione quâ numerus laterum augetur. Idcóq; in Polygono infinitorum laterum, istius anguli differentia ab angulo recto est infinitè parva, (nam si sit N infinitum, erit $\frac{2}{N}$ infinite parvum;) At, quod est infinitè parvum, illud est omni positivâ quantitate minus, ideóq; & non-quantum. Jam verò Polygonum infinitorum laterum, vel circulus est, vel saltem circulo inscriptibile: Si prius; erit igitur differentia anguli semicirculi ab angulo recto infinite parva: Si posterius; erit ea differentia adhuc minor, (nam latus polygoni circulo inscripti, cum extremitate diametri, angulum facit minorem quam facit peripheria cum eadem diametri extremitate, ideóq; magis

Digitized by Google

a recto deficit quam angulus Semicirculi.) Quod verò vel infinite parvum est, vel (si fieri possit) minus quàm infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, adeoq; non-quantum. Angulus igitur contactûs, quæ est differentia anguli semicirculi ab angulo recto rectilineo, est non-quantus. Quod erat demonstrandum.

2° Potest & idem pariter ostendi hoc modo. Si figuræ cujusvis regularis singula latera producantur (versus unam partem) fient tot anguli externi quot sunt latera; quorum omnium aggregatum æquatur quatuor rectis (per ea quæ habet



Clavius ad 32 e 1) ideoq; eorum quilibet $\frac{1}{N}$ quatuor rectorum. Supponamus jam, ut prius, Polygonum infinitorum laterum; erit igitur istius angulus externus, ($A = \frac{4}{N}$ rectis) quatuor rectorum pars infinite parva, (nam si sit N infinita, erit $\frac{1}{N}$ infinite parvum.) Est autem hic angulus, vel ille angulus contactûs de quo loquimur (si nempe polygonum infinitorum laterum habeatur pro circulo,) vel saltem illo major (per 16 e 3:) Si prius dicatur; est angulus contactûs infinite parvus: Si posterius, est adhuc minor: At quod vel infinite parvum est, vel minus quàm infinite parvum, illud est omni positiva quantitate minus, idcóq; non-quantum. Est igitur angulus

lus contactûs non-quantus. Quod erat ostendendum.

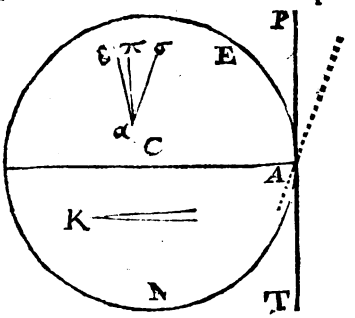
3° Quoniam magnitudo anguli tam externi A, quàm interni ejusve semissis CAL, æstimanda sit ex numero laterum, (ut ostensum est) adeóq; figuræ regulares eundem laterum numerum habentes habeant etiam ejusmodi angulos æquales: si concipiatur circulus ut Polygonum infinitorum laterum, concipienda sunt infinita latera unius circuli tot quot infinita illa latera alterius circuli (secus enim non essent circuli figuræ similes) & consequenter erunt tam anguli contactûs æquales quam anguli semicirculorum; (quod supra aliis argumentis contendimus:) Unde sequetur, Angulos contactûs esse non-quantos. ut supra etiam ostensum est.

4° Idem aliter sic patebit. Si a centro Polygoni regularis, (vel, quod idem est, circuli circumscripti,) ducatur recta ad Polygoni perimetrum duos utrinq; angulos æquales faciens, erit illa vel lateri perpendicularis, & CL, vel ad figuræ angulum ducta ut CA; (nam, sicubi alias ducatur, manifestum est angulos obliquos fieri, & inæquales.) Manifestum etiam est, differentiam rectarum CA, CL, semper minui, prout numerus laterum augetur, usq; dum tandem in Polygono infinitorum laterum, sive Circulo, fit vel infinite parva vel nulla: sed hoc obiter. Supponamus jam, ut prius, pro circulo Polygonum infinitorum laterum: quoniam autem radius cum peripheria angulos facit æquales, (ut manifestum est) concipiendus est vel ut recta CL (ad medium lateris) vel ut CA (ad angulum:) si priùs supponatur; erunt anguli recti, (nam recta a centro ad medium lateris Polygoni regularis angulos rectos facit;) Si posterius; saltem (cum omnes radii sint æquales, adeóq; CA, CL, æquales) erunt anguli CAL, CLA, æquales per 5 e 1; ideóq; & uterque rectus: (Angulus autem ACL nullus erit, sed ipsa crura AC, LC, coincident.) Utrumvis igitur supponatur, erit angulus semiculi recto rectilineo æqualis; & propterea angulus contactus est non-quantus. Quod erat demonstrandum.

5° Subjungam huic argumento etiam hanc speculationem non absimilis naturæ. Si angulus contactus EAP sit vere angulus; tunc & residuus ad duos rectos erit vere angulus, nempe EAT, vel PAN, qui continetur rectâ tangente & peripheria semicirculi remotioris, puta TA & AE, vel PA & AN.

Digitized by Google

neq; erunt lineæ T A, A E, aut P A, A N, in directum positæ, (nam lineæ in directum positæ non continent angulum, per 8 d 1.) At, hoc concesso, multo magis dicendum esset duas peripherias N A, A E, angulum continere; est enim curvatura N A E dupla curvaturæ T A E. quod si N A E non sit angulus, sed una linea continuata sive in directum posita, (prout concedi solet ab omnibus; quis enim dixerit in singulis peripheriæ punctis angulum formari?) neq; erit T A E vel P A N angulus, sed potius linea in directum posita; Et consequenter neq; P A E aut T A N angulus erit, sed potius lineæ coincidentes, quantum scilicet ad ipsum punctum contactus attinet.



Atq; hinc obiter discere licet, quo pacto duæ dissimiles lineæ, puta curva & recta, vel peripheria & parabola, vel etiam peripheriæ majoris & minoris circuli, aut etiam convexa & concava, &c. continuari possint. Quod monuisse sufficit.

6° Notum est, aream figuræ regularis quotcunq; laterum æqualem esse rectangulo quod semiperimetro & rectâ a centro ad perimetrum perpendiculari continetur; (sin recta illa non sit ad perimetrum perpendicularis, seu ad angulos rectos, secus erit,) At idem ostendit Archimedes, (prop. 1. de dimensione circuli,) de circulo; nempe aream circuli æqualem esse rectangulo sub radio & semiperipheria; Est igitur radius ad peripheriam perpendicularis, sive ad angulos rectos. Si enim angulus radio & peripheria comprehensus, minor esset recto rectilineo; esset area circuli minor quam ejusmodi parallelogrammum rectangulum. Nam illud quidem universaliter verum est; si duæ rectæ, quarum altera est semiperimeter figuræ regularis, altera recta ad latus ipsius quodlibet quocunq; angulo ducta, parallelogrammum eodem angulo contineant, erit hoc parallelogrammum areæ istius figuræ regularis æquale, (ut probari potest ex 35 e 1.) Cum igitur parallelogrammum radio (hoc est, recta a centro) & semiperipheria comprehensum, quod a-

reæ

Digitized by Google

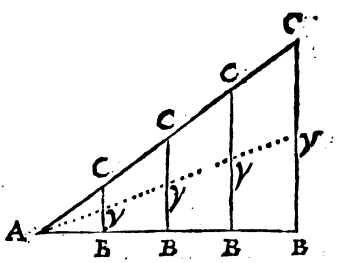
reæ circuli æquatur, ſit rectangulum; manifeſtum eſt, & angulos quos illa recta a centro ad peripheriam facit, rectos eſſe & rectis rectilineis æquales. Quod erat oſtendendum.

CAP. XIII.

Argumentum quintum: ex proportione evaneſcente, deductum.

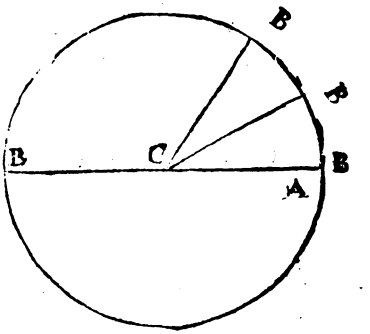
SEquitur aliud argumentum. Cui hoc Lemma præponendum eſt; [*Si duæ quantitates ſimul proportionaliter vel creſcunt vel decreſcunt; ubi earum una reducta eſt ad nihilum ſeu non-quantum, etiam & reliqua ad nihilum ſeu non-quantum reducitur.*

Exſemplum hoc eſto. Rectæ AB, AC, angulum A utcunq; faciant; ipſiq; AB ubivis inſiſtat BC angulum ABC rectum faciens (vel, ſi libet, alium ad libitum.) Jam ſi ſupponatur BC recta, ſuper rectam AB moveri invariato angulo ABC; prout punctum B remotius vel propius diſtat a puncto A, in eadem ratione recta BC augetur vel minuitur, per 4 e 6. Quoniam igitur AB . AB :: BC . BC proportionales ſint, ubicunq; ſumatur punctum B; ſi, inquam, punctum B ſumatur idem quod A, adeóq; diſtantia AB nulla ſit, (propter coincidentiam punctorum A, B,) etiam & longitudo lineæ BC nulla erit. Quod, ſi opus eſt, probari poterit ex 16 e 6. Et quidem licet alibi alia ſit ratio rectæ AB ad BC quam ad Bγ, tamen ſi B aſſignetur in ipſo A, tam BC quam Bγ ſimiliter in punctum degenerant.



Exſemplum aliud hoc eſto. Quoniam, ſi recta CB, manente centro C, circumvolvatur; angulus BCD, & peripheria

B A proportionaliter vel crescunt vel decrescunt, per 33 e 6: Ubi C B pervenerit ad situm C A, adeóq; (propter coincidentiam punctorum B, A,) peripheria evanescat, sive degeneret in punctum: etiam evanescit angulus B C A, & degenerat in non-angulum: Et, contra, ubi hoc fit, illud fiet. Quod etiam probari poterit, per 16 e 6.

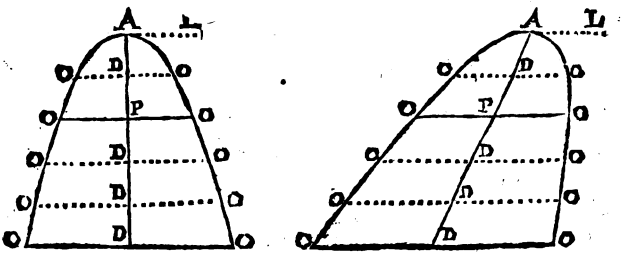


Atq; idem pari modo fiet in aliis duabus quantitatibus quibusvis, quæ simul vel crescunt vel decrescunt proportionaliter. Prout liquet ex illa propositione 16 e 6. Quamvis enim ea speciatim de rectis lineis ab Euclide & affirmetur & demonstretur; attamen idem non minus verum esse de quibusvis quatuor proportionalibus nemo dubitat, cum idem subsit in omnibus fundamentum: unde notissima illa regula, quæ *Aurea* dici solet, originem ducit; quia nempe, ex quatuor proportinalibus, quod fit ex mutua multiplicatione mediorum, æquatur facto ex mutua multiplicatione extremorum. Ideóq; si mediorum alterum sit ciphra seu non-quantum, necesse est ut & extremorum alterum sit etiam ciphra seu non quantum: secus enim ea æqualitas factorum non prodibit.

Imò idem etiam omnino accidit, non modò ubi eadem est utriusq; quantitatis crescendi & decrescendi ratio, sed etiam ubi incrementi & decrementi ratio in una quantitate est rationis quæ in alia quantitate reperitur, duplicata vel triplicata (vel alio etiam aliquo modo immutata:) ut liquet in Parabola. Quoniam enim ordinatim applicatæ in eadem Parabolâ crescunt & decrescunt, non quidē in eadem ratione cum diametris, sed in subduplicata ratione diametrorum: ideo tamen, ubi harum alterutra redigitur ad non-quantum, etiam reliqua ad non-quantum redigetur. Verbi gratiâ, Quoniam in Parabolâ A O prout Diametri punctum D aliud atq; aliud assumitur ita tam Diameter A D, quam ordinatim applicata O D; brevio-

Digitized by Google

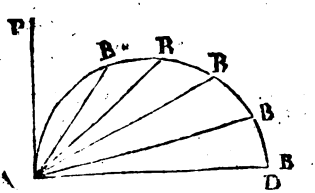
vior est aut longior; non tamen utraq; in eâdem ratione, sed



altera in alterius ratione duplicatâ; sunt enim diametri ad invicem, non ut ipsæ ordinatim-applicatæ, sed ut ordinatim-applicatarum quadrata, (prout notum est ex principiis Conicis,) nempe AD. AD:: ODq. ODq. Si tamen punctum D assignetur in ipso Parabolæ vertice A, adeo ut intercepta diameter AD nulla sit (propter coincidentiam punctorum A, D,) etiam & ordinatim-applicata OD nulla erit, sive nullius longitudinis; ut patet.

Sed & idem eveniet in Hyperbola, vel Ellipsi, aliâve ejusmodi curvâ; ubi tamen ratio diametri ad ordinatim-applicatas magis adhuc est intricata. Adeo ut Lemmatis veritas abundè constet.

His positis, sic procedit argumentum. Sit recta PA extremo diametri AD perpendicularis, adeóq; peripheriam ABD contingens in puncto A, unde recta AB (quantum opus est extensa) concurrat cum peripheria ubivis in B: circumducta iam recta AB secabit peripheriam in variis successivè punctis quorum quovis B insigniatur: semper autem, hoc tranſitu, peripheria BA & angulus rectilineus BAP proportionaliter simul tam crescunt quam decrescunt, per 32 e 3 & 33 e 6. Idcoq;, ubi punctum B ad ipsum A pervenerit,



Digitized by Google

rit, adeoq; peripheria B A evaneſcat & nullius evadat magnitudinis, ſimul etiam angulus B A P evaneſcet & nullus fiet, ſive nullius magnitudinis. Eſt autem, hoc in caſu, angulus ille B A P, vel ipſe angulus contactus, vel ſaltem non ipſo minor; Ergo angulus contactûs nullius eſt magnitudinis, ſive non-angulus. Quod erat demonſtrandum.

CAP. XIV.

Argumentum ſextum, Ex Opticis petitum, & Sectionibus Conicis.

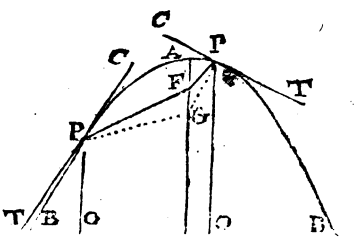
MOnet hic tandem Clavius, & quidem recte, *Id quod de angulo contactus, qui fit in circulis, docetur; verum etiam eſſe de angulo contactus, qui in conicis ſectionibus efficitur: Ut enim demonſtrat Apollonius Pergæus lib. 1. prop. 32. In locum, qui inter coni ſectionem & rectam lineam tangentem interjicitur, altera recta linea non cadit: A quo adeo angulus ille contactus minor etiam eſt omni acuto rectilineo, & reliquus angulus ex recto (ſi nimirum ex puncto contactus ad lineam tangentem excitatur perpendicularis) omni acuto rectilineo major.* Hoc ego quidem tanquam veriſſimum agnoſco, non modò de ſectionibus conicis, ſed & aliis quibuſvis curvis: nempe angulum contactus, qui ad illas efficitur, minorem eſſe omni angulo acuto, utpote qui ſit non-angulus; reliquum verò ad rectum, majorem eſſe omni acuto rectilineo, eſt enim rectus, & recto rectilineo æqualis: eſt enim hìc eadem ratio quæ in circulo. At hìc, inquit, *major abſurditas apparet, quoad ſenſum, in eâ Ellipſi quæ perexiguam habet latitudinem, & in ea Hyperbolâ quæ ferè linea recta eſſe videatur: valdè enim inæquales cernuntur anguli ad verticem illius Ellipſis & Hyperbolæ conſtituti.* Verum ego neq; majorem abſurditatem neq; omnino ullam hic conſpicio. Quamvis enim crurum divaricatio extra punctum contactus varia videatur; in ipſo tam contactus puncto non eſt varia linearum inclinatio, nec quidem omnino ulla. Et, ſi nihil abſurdi ſit, lineas contiguas in ipſo contactus puncto, æqualiter omnes *diſtare*, (hoc eſt, non omnino,) licet extra illud punctum earum diſtantiæ (pro varia ipſarum divaricatione) variæ ſint; cur magis abſurdum eſſet, earum omnium *inclinationes*, in puncto contactûs, æquales eſſe (hoc eſt, nullas) licet alibi ſint admodum inæquales? Aut etiam

Digitized by Google

tiam (quoniam ad sensus judicium fit provocatio) cur magis incredibile existimem, acutam illam Ellipsin, & obtusam Hyperbolam, in ipsis contactuum punctis, ad rectas tangentes pariter non-inclinari, quamvis postea varie divaricentur; quam, easdem pariter suas rectas non nisi in unico puncto contingere? Nam & hoc sensui non magis credibile videbitur; neq; tamen Clavius, credo, negaret.

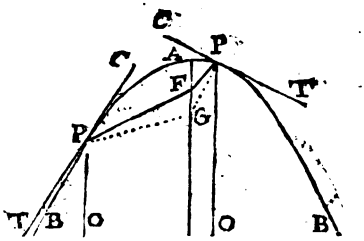
Quoniam verò de contactibus in Coni sectionibus mentionem facit Clavius; videbimus & illic omnia nostræ sententiæ consentanea. Instantiam desumam ex opticis; quæ hæc esto.

Tradit Vitellio, lib. 5. prop. 2. *Angulos incidentiæ & reflexionis, æquales invicem esse, in speculis quibuscunq;, sive planis sive concavis sive convexis*: Atq; illud etiam agnoscunt Optici omnes. Sed & idem Vitellio, lib. 9. pr. 43. ostendit, *In speculo concavo parabolico radios omnes, qui in illud ubivis incidunt axi paralleli, ad unicum idemq; punctum, qui Focus dici solet, reflecti*: Quod & post illum agnoscunt alii Optici. Hoc autem ut demonstret, ostendit, ex Apollonio, lineam incidentiæ, & lineam reflectionis ad focum, angulos æquales cum rectâ contingente facere. Verbi gratiâ. Sit punctũ objecti, O unde ad speculi punctum P ducatur recta OP, axi parallela: inde autem ad focum PF: Erunt anguli OPT, FPC,



(cum recta tangente CPT facti) æquales; ut Vitellio ex Apollonio demonstrat; ideoq;, inquit, reflexio fiet ad punctum F: atq; idem fiet quodcunq; fit punctum speculi P, in quod radius OP axi parallelus inciderit. At oportuit ostendisse, non tam angulos OPT, FPC, ad contingentem factos, æquales esse; quàm OPB, FPA, ad speculum factos, æquales esse; angulum nempe incidentiæ & reflectionis in speculo. Vel igitur æqualitas angulorum ad rectam contingentem, eandem infert æqualitatem angulorum ad speculum; vel demonstratio non procedit. Cùm igitur demonstratio hæc pro legitima solet, quod sciam, ab omnibus haberi; dicendum est eandem utrobiq; esse æqualitatem. Ideóq; cùm æquales sint tam OPT, FPC,

F P C, anguli ad contingentem, quam O P B, F P A, anguli ad ſpeculum; erunt etiam (per 3 axioma primi Euclidis) anguli C P A, T P B, vel æquales, vel potius nulli. At manifeſtum eſt etiam, crura cruribus non utraq; congruere; nam ſi angulus alter alteri ſuperponatur, quamvis congruere poſſint crura P T, P C, attamen P B, P A, non congruent, neq; alterum



in altero jacebit, ſed tota P B, ſolo puncto B excepto, cadet inter ipſas P C, P A, ut nemo non concedet, qui Parabolæ naturam ſatis intelligit. Unde etiam manifeſto liquet, crura illa, quæ, extra punctum concurſus, variè divaricantur, poſſe tamen æquales angulos continere.

Verum ſiquis diceret (contra Vitellionem, aliósq; Opticos) Radium O P, non reflecti ad punctum F præciſe (quamvis ad illud quam proximè) eò quod exiſtimet angulum O P B, angulo F P A, non præcisè æqualem, ſed aliquantillo majorem, propterea quod angulus ablatus B P T, angulo ablato A P C, minor videatur: Sic refutandi erunt. Si non ad punctum F fiat reflexio; eſto, ſi fieri poſſit, ad punctum aliud aliquod inferius in axe aſſignandum, (nam ad aliquod ſaltem axis punctum reflexionem fieri, nemo dubitabit,) ſitq; illud punctum G, ut tandem angulus reflexionis A P G, fiat æqualis angulo incidentiæ O P B. Erit ergo angulus rectilineus F P G, differentia angulorum F P A, G P A, ſeu F P A, O P B, adeoq; angulorum A P C, B P T; quod fieri non poteſt, cum ſit horum utervis omni angulo rectilineo poſſibili minor: non poteſt enim alia recta inter rectam contingentem & coni ſectionem cadere, per 32 lib. 1. Apol. Non ergo ſit reflexio ad G, ergo ad F; ideóq; tam anguli A P F, B P O, quam G P F, T P O, ſunt æquales; ideóq; A P C, B P T vel ſaltem æquales, vel potius

Digitized by Google

tius nulli. Idem igitur & de angulis contactuum in Conicis sectionibus verum est non minus quàm in circulis. Sed & argumentorum præcedentium aliquot de sectionibus conicis, aliisve curvis, pariter atq; de circulis concludunt.

Postquam hoc totum negotium absolveram, admonuit me (quod ante nesciebam) Clarissimus vir D. *Sethus Ward*, apud nos Astronomiæ Professor *Savilianus*, dignissimus Collega meus, Cabbæum, in libro suo de Meteoris, Vitellionis demonstrationem ut minus sufficientem improbasse, ea quidem de causa quam & ego jam innui; adeò ut eam quam subjunxi confirmationem non omnino inutilem fuisse, sed plane necessariam, jam reperiam.

CAP. XV.

Clavii Corollariis respondetur.

DEniq; mysteria aliquot hic adjungit Clavius, quasi ex Euclidis propositione, prout ab ipso est intellecta, emergentia. Ut illud Cardani;

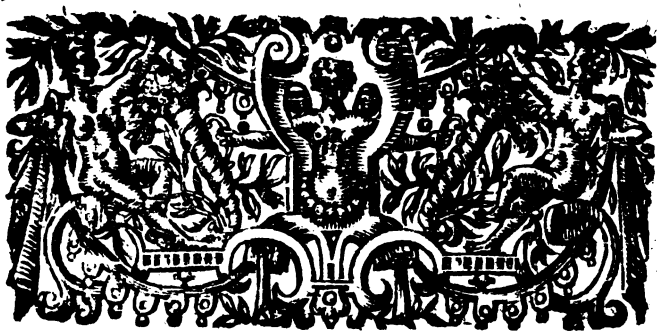
Potest aliqua quantitas continuè & infinitè augeri, altera vero infinite minui; & tamen augmentum illius, quantumcunq; sit, minus semper erit decremento hujus: propterea nempe quod angulus contactus quantumvis multiplicatus, minor sit angulo quovis rectilineo quantumvis diminuto.

Item illud ex Campano; *Transiri posse a minori ad majus, vel contra, & per omnia media, nec tamen per æquale.* Quod tantundem est acsi diceret, erectum quemvis in plano Horizontali stantem, posse dextrorsum ab Oriente ad Occidentem faciem convertere nec tamen interim ad Meridiem conversam habeat.

At hæc, & siqua sunt similia, cùm aliud non habeant fundamentum, quàm quòd supponant, *Angulum contactus vere quantitatem esse*, ulteriore refutatione non indigent. Sufficit enim demonstrasse, (quod abunde factum esse judico.) *Angulum contactus esse non-angulum*, seu *non-quantum*; & propterea, *Angulum Semicirculi æqualem esse recto rectilineo.*

Digitized by Google

Digitized by Google



INDEX CAPITUM

In Tractatu Præcedente.

I. *Anſa & ſtatus præſentis controverſiæ.*

II. *Controverſiam hanc ab Euclide diremptam non eſſe.*

III. *Anguli Plani natura & definitio explicantur.*

IV. *Argumentum primum, ab Inclinationis, Anguliq; plani, naturâ petitum.*

V. *Argumentum ſecundum; ab Angulorum Planorum* ὁμωγενείᾳ *dependens.*

VI. *Exceptionibus Clavii reſpondetur.*

VII. *Angulorum Planorum* ὁμογένεια *quatuor argumentis ulterius confirmatur.*

VIII. *D.* Henrici Savilii *Teſtimonium hac in re.*

IX. *Argumentum tertium; ab æqualibus ſimilium ſegmentorum angulis deſumptum.*

X. *Similium ſegmentorum angulos æquales eſſe, ſex Argumentis ulterius confirmatur.*

XI. *Objectioni in contrarium reſpondetur.*

XII.

Digitized by Google

XII. *Argumentum quartum, (ſeu argumentorum claſſis quarta, ſex diſtinctis argumentis conſtans,) hinc deſumitur, quoniam, Quod omni poſitivâ quantitate aſſignabili minus eſt, eſt non-quantum.*

XIII. *Argumentum quintum; ab evaneſcente proportione deſumptum.*

XIV. *Argumentum ſextum; ex Opticis petitum, & ſectionibus Conicis.*

XV. *Clavii corollariis reſpondetur.*

F I N I S.



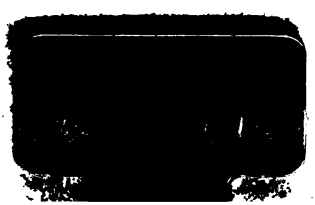
Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google